GEOMETRIA 2, PARTE B

M. LONGO, E. MISTRETTA

Esercizio 1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra due spazi topologici. Dopo aver ricordato le definizione di *funzione aperta* tra due spazi topologici, e quella di *sottoinsieme denso* di uno spazio topologico, dimostrare che se f è aperta e $D \subseteq Y$ è un sottoinsieme denso di Y, allora $f^{-1}(D)$ è denso in X.

Svolgimento. Una funzione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici è *aperta* se per ogni aperto U di X, $f(U)$ è un aperto di Y. Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X è *denso* se per ogni aperto non vuoto $U \subseteq X$ si ha $U \cap D \neq \emptyset$. Fisso un aperto $U \subseteq X$, non vuoto. Poiché f è aperta, $f(U)$ è aperto in Y, dunque esiste $y \in D \cap f(U)$. Sia $x \in U$ tale che $f(x) = y$. Allora $x \in f^{-1}(D) \cap U$, perciò $f^{-1}(D) \cap U \neq \emptyset$. Dall'arbitrarietà di U segue che $f^{-1}(D)$ è denso in X. $\square$

Esercizio 2. Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ due funzioni continue. Supponiamo che Y sia di Hausdorff. Dopo aver ricordato la definizione di *spazio di Hausdorff*, o *spazio T2*, dimostrare che l'insieme $C = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.

Svolgimento. Uno spazio topologico X si dice *di Hausdorff* se dati due punti x e y in X, esistono due intorni aperti U e V di x e y, rispettivamente, tali che $U \cap V = \emptyset$. Consideriamo la funzione $F : X \to Y \times Y$ definita da $F(x) = (f(x), g(x))$. Notiamo che F è continua. Ricordiamo che la diagonale $\Delta \subseteq Y \times Y$ è chiusa in $Y \times Y$ rispetto alla topologia prodotto, visto che Y è di Hausdorff. Poichè $C = F^{-1}(\Delta)$, segue dalla continuità di F che C è chiuso. Alternativamente, si può dimostrare che il complementare di C è aperto: se $x \notin C$, allora $f(x) \neq g(x)$, dunque, poiché Y è T2, esistono V e W intorni aperti di $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente tali che $V \cap W = \emptyset$; allora $U = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ è un intorno aperto di x ad intersezione vuota con C, dunque il complementare di C è intorno di ogni suo punto, dunque è aperto. $\square$

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{S}^n - \{N\}$ la sfera n-dimensionale, dove $n \geq 2$ è un intero, contenuta in $\mathbb{R}^{n+1}$, privata di un suo punto $N = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dimostrare che X non è compatto, e determinare esplicitamente un ricoprimento aperto di X da cui non è possibile estrarre nessun sottoricoprimento finito.

Svolgimento. Tramite proiezione stereografica, X è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, che non è compatto. Per ogni reale $\varepsilon < 1$, definisco $U_\varepsilon = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in X | x_n < \varepsilon\}$. Allora $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon : \varepsilon < 1\}$ è un ricoprimento aperto di X da cui non è possibile estrarre nessun sottoricoprimento finito. $\square$

Esercizio 4. Siano a, b, c tre numeri reali positivi e $U = (0, 2\pi) \times (0, +\infty)$. Definiamo la parametrizzazione $x : U \to \mathbb{R}^3$ tramite la formula

$$x(u, v) = (a(\cos(u) - v \sin(u)), b(\sin(u) + v \cos(u)), cv)\,.$$

Dopo aver verificato l'immagine di questa parametrizzazione è un aperto dell'iperboloide ellittico descritto dall'equazione $Q : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ in $\mathbb{R}^3$, calcolarne la matrice della prima e della

Date: 17/06/2021.

seconda forma fondamentale e la curvatura gaussiana, eventualmente, nel caso in cui questo venga ritenuto comodo, rinominando in modo chiaro le espressioni ricorrenti più lunghe.

Svolgimento. Un calcolo diretto mostra che

$$\frac{(a(\cos(u)-v\sin(u)))^2}{a^2}+\frac{(b(\sin(u)+v\cos(u)))^2}{b^2}-\frac{(cv)^2}{c^2}=1$$

dunque l'immagine della parametrizzazione è contenuta nell'iperboloide (in realtà, abbiamo la suriettività della parametrizzazione). Calcoliamo:

$$x_u=\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}=(a(-\sin(u)-v\cos(u)),b(\cos(u)-v\sin(u),0),$$

$$x_v=\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}=(-a\sin(u),b\cos(u),c),$$

$$x_u\wedge x_v=\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ a(-\sin(u)-v\cos(u)) & b(\cos(u)-v\sin(u)) & 0\\ -a\sin(u) & b\cos(u) & c\end{pmatrix}$$

$$=(bc(\cos(u)-v\sin(u)),ac(\sin(u)+v\cos(u)),-abv),$$

$$x_{uu}=\frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial^2 u}=(a(-\cos(u)+v\sin(u)),b(-\sin(u)-v\cos(u)),0),$$

$$x_{uv}=\frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial u\partial v}=(-a\cos(u),-b\sin(u),0),$$

$$x_{vv}=\frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial^2 v}=(0,0,0).$$

Calcolo la prima forma fondamentale

$$E=x_u\bullet x_u=a^2((\sin(u)+v\cos(u)))^2+b^2((\cos(u)-v\sin(u))^2),$$

$$F=x_u\bullet x_v=a^2\sin(u)(\sin(u)+v\cos(u))+b^2\cos(u)(\cos(u)-v\sin(u)),$$

$$G=x_v\bullet x_v=a^2\sin^2(u)+b^2\cos^2(u)+c^2,$$

dunque la matrice della prima forma fondamentale è:

$$\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}$$

il cui determinante vale

$$\det\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\delta(u,v)$$

dove per semplicità abbiamo posto

$$\delta(u,v)=\left(a^2((\sin(u)+v\cos(u)))^2+b^2((\cos(u)-v\sin(u))^2)\right)\cdot\left(a^2\sin^2(u)+b^2\cos^2(u)+c^2\right)-$$
$$-(a^2\sin(u)(\sin(u)+v\cos(u))+b^2\cos(u)(\cos(u)-v\sin(u)))^2.$$

Calcolo il campo dei versori normale

$$\mathbb{N}=\frac{x_u\wedge x_v}{\parallel x_u\wedge x_v\parallel}$$
$$=\frac{(bc(\cos(u)-v\sin(u)),ac(\sin(u)+v\cos(u)),-abv)}{\sqrt{b^2c^2(\cos^2(u)+v^2\sin^2(u)-2v\cos(u)\sin(u))+a^2c^2(\sin^2(u)+v^2\cos^2(u)+2v\cos(u)\sin(u))+c^2b^2v^2}}$$

quindi indicando per comodità

$$\gamma(u,v)=\sqrt{b^2c^2(\cos^2(u)+v^2\sin^2(u)-2v\cos(u)\sin(u))+a^2c^2(\sin^2(u)+v^2\cos^2(u)+2v\cos(u)\sin(u))+c^2b^2v^2}$$

abbiamo

$$\mathbb{N} = \frac{(bc(\cos(u) - v\sin(u)), ac(\sin(u) + v\cos(u)), -abv)}{\gamma(u,v)}.$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathbb{N} \bullet x_{uu} \\
&= \frac{(bc(\cos(u) - v\sin(u)), ac(\sin(u) + v\cos(u)), -abv)}{\gamma(u,v)} \bullet (a(-\cos(u) + v\sin(u)), b(-\sin(u) - v\cos(u)), 0) \\
&= \frac{-abc((\cos(u) - v\sin(u))^2 + (\cos(u) + v\sin(u))^2)}{\gamma(u,v)} \\
&= \frac{-2abc(\cos^2(u) + v^2\sin^2(u))}{\gamma(u,v)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathbb{N} \bullet x_{uv} \\
&= \frac{(bc(\cos(u) - v\sin(u)), ac(\sin(u) + v\cos(u)), -abv)}{\gamma(u,v)} \bullet (-a\cos(u), -b\sin(u), 0) \\
&= \frac{-abc(\cos^2(u) - v\cos(u)\sin(u) + \sin^2(u) + v\cos(u)\sin(u))}{\gamma(u,v)} \\
&= \frac{-abc}{\gamma(u,v)}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N} = \mathbb{N} \bullet x_{vv} = \mathbb{N} \bullet (0,0,0) = 0,$$

quindi la matrice della seconda forma fondamentale è

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \frac{-(abc)^2}{\gamma(u,v)^2}.$$

Possiamo infine calcolare la curvatura gaussiana

$$K = -\frac{(abc)^2}{\delta(u,v) \cdot \gamma(u,v)^2}$$

□

Esercizio 5. Dimostrare che se una curva $\alpha : J \to \mathbb{R}^2$, dove J è un intervallo, ha curvatura identicamente nulla, allora è contenuta in una retta.

Dimostrazione. Vedere appunti o il libro di testo (Sernesi, Proposizione 32.3(a)). □

Esercizio 6. Siano A e B due sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^2$ e sia

$$W(A,B) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) | g(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Dimostrare che se A è compatto, allora $W(A,B)$ è un chiuso in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Mostrare con un esempio che se A e B non sono compatti allora $W(A,B)$ può non essere chiuso.

Suggerimento. Per mostrare la chiusura di $W(A,B)$, basta mostrare che data una successione $n \mapsto g_n$ convergente ad un elemento g in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, se i $g_n \in W(A,B)$, allora anche $g \in W(A,B)$. Può essere utilizzato il fatto che in un compatto di $\mathbb{R}^2$, ogni successione ammette sottosuccessione convergente. Per il controesempio, trovare A e B tali che $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin W(A,B)$ ma ogni intorno U di $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ soddisfa la condizione $U \cap W(A,B) \neq \emptyset$.

Svolgimento. Mostro che $W(A,B)$ è chiuso utilizzando il seguente criterio: se $n \mapsto g_n$ è una successione (con $n \geq 0$ un intero) di elementi in $W(A,B)$ che converge in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ad un elemento $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, allora $g \in W(A,B)$. Basta dunque dimostrare che $g(A) \cap B \neq \emptyset$. Per ogni intero $n \geq 0$, sia $a_n \in A$ tale che $g_n(a_n) \cap B \neq \emptyset$. Poichè A è compatto, si scelga una sottosuccessione $k \mapsto a_{n_k}$ che converge in A, e definiamo $a = \lim_k a_{n_k}$. Mostro ora che $g(a) \in B$. Considero la successione $k \mapsto g_{n_k}(a_{n_k})$. E' facile vedere che questa successione converge a $g(a)$: se scrivo $g_{n_k} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{n_k} & \beta_{n_k} \\ \gamma_{n_k} & \delta_{n_k} \end{smallmatrix}\right)$ e $g = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$, $a = (x,y)$ e $a_{n_k} = (x_{n_k}, y_{n_k})$, allora abbiamo (adottando la convenzione di far agire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^2$ da sinistra tramite moltiplicazione per vettori colonna: se viene adottata la convenzione, meno usuale, dell'azione a destra i calcoli sono simili)

$$g_{n_k}(a_{n_k}) = \begin{pmatrix} \alpha_{n_k} & \beta_{n_k} \\ \gamma_{n_k} & \delta_{n_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n_k} \\ y_{n_k} \end{pmatrix} = (\alpha_{n_k} x_{n_k} + \beta_{n_k} y_{n_k}, \gamma_{n_k} x_{n_k} + \delta_{n_k} y_{n_k});$$

dunque la successione $k \mapsto g_{n_k}(a_{n_k})$ converge a $(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ perché, nella topologia euclidea di $\mathbb{R}$, la successione $k \mapsto \alpha_{n_k}$ converge ad α, la successione $k \mapsto \beta_{n_k}$ converge a β, la successione $k \mapsto \gamma_{n,k}$ converge a γ, la successione $k \mapsto \delta_{n_k}$ converge a δ, la successione $k \mapsto x_{n_k}$ converge a x e la successione $k \mapsto y_{n_k}$ converge a y (si ricordi un risultato elementare di analisi: somme e prodotti di successioni convergenti convergono, ed il loro limite è la somma o il prodotto, rispettivamente, dei limiti); notiamo infine che il limite $(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ della successione $k \mapsto g_{n_k}(a_{n_k})$ è

$$g(a) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

quindi concludiamo, come precedentemente affermato, che la successione $k \mapsto g_{n_k}(a_{n_k})$ converge a $g(a)$. Ora, gli elementi $g_{n_k}(a_{n_k})$ appartengono a B. Poiché B è chiuso, e la successione $k \mapsto g_{n_k}(a_{n_k})$ converge a $g(a)$, segue che $g(a)$ appartiene ad B, dunque $g(A) \cap B \neq \emptyset$ perché $g(a) \in g(A) \cap B$.

Per la seconda parte, siano $A = \mathbb{R}$ e

$$B = \{(x, 1/x) : x > 0\} \cup \{(x, -1/x) : x > 0\},$$

entrambi chiusi in $\mathbb{R}^2$. Allora $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ appartiene al complementare di $W(A,B)$. Sia ora U un intorno di $\mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}$. Fisso un elemento $u \in U$ tale che $u = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con $b \neq 0$ (un tale elemento esiste perchè altrimenti U sarebbe contenuto nell'iperpiano di dimensione 3 i cui elementi sono le matrici $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, con $a, c, d \in \mathbb{R}$, e questo non è possibile). Segue the $u((1,0)) = (a,b)$ con $b \neq 0$. Dunque, $u(A)$ è una retta di $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine e diversa dalla retta $\langle (1,0) \rangle$; ogni tale retta interseca uno dei due rami dell'iperbole la cui unione è B (usare un facile argomento di continuità in analisi reale), quindi $u(A) \cap B \neq \emptyset$. Abbiamo mostrato con questo argomento che ogni intorno U di $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ soddisfa $U(A) \cap B \neq \emptyset$, perciò $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ non ammette alcun intorno contenuto nel complementare di $W(A,B)$. Da questo segue che il complementare di $W(A,B)$ non è aperto. $\square$