

GEOMETRIA 2, PARTE B

M. LONGO, E. MISTRETTA

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico.

- (a) Dare la definizione di *chiusura* $\overline{E}$ di un sottoinsieme E di X .
- (b) Dire cosa significa che un sottoinsieme E di X è *denso* in X .
- (c) Sia $U \subseteq X$ un aperto e $E \subseteq X$ un sottoinsieme denso di X . Dimostrare che $\overline{E \cap U} \supseteq U$.
- (d) E' vero o falso che per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ si ha che $\overline{A \cap E} \supseteq A$? Fornire una dimostrazione o un controesempio.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico.

- (a) Dire cosa significa che un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è *connesso*.
- (b) Dimostrare che se Y è connesso, allora anche la chiusura $\overline{Y}$ di Y in X è connessa.
- (c) Utilizzando il punto precedente, si dimostri che la sfera n -dimensionale

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

contenuta in $\mathbb{R}^{n+1}$, dove $n \geq 1$ è un intero, è connessa.

- (d) E' vero o falso che se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua tra due spazi topologici X ed Y , e C è un sottoinsieme connesso di X , allora $f(C)$ è un sottoinsieme connesso di Y ? Fornire una dimostrazione o un controesempio.

Esercizio 3. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie (di rotazione) di equazione $x : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x(u, v) = (2u + 1, u^2 \cos(2\pi v), u^2 \sin(2\pi v)).$$

- (a) S è compatta? Fornire una giustificazione.
- (b) Calcolare la prima forma fondamentale di S .
- (c) Calcolare la seconda forma fondamentale di S .
- (d) Calcolare la curvatura gaussiana di S .