GEOMETRIA 2, PARTE B

M. LONGO, E. MISTRETTA

Esercizio 1. Ricordiamo che un sottoinsieme E di uno spazio topologico X si dice *discreto* se la topologia indotta da X su E è quella discreta.

(a) Dimostrare che E è discreto in X se e solo se ogni $e \in E$ possiede un intorno U_e in X tale che $U_e \cap E = \{e\}$.

(b) Dimostrare che se E è discreto e compatto, allora è necessariamente finito.

Definiamo ora i sottospazi

$$S = \{1/n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\},$$
$$T = S \cup \{0\}$$

di $\mathbb{R}$, dotato della usuale topologia euclidea.

(c) Dire se S è un insieme discreto di $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.

(d) Dire se T è un insieme discreto di $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.

Dotiamo l]'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali della topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

(e) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$? $\mathbb{Q}$ è discreto in $\mathbb{R}$?

(f) Sia $x \in \mathbb{Q}$. Descrivere la componente connessa di $\mathbb{Q}$ che contiene x.

Soluzione. (a) Se E è discreto, allora per ogni $e \in E$ si ha che $\{e\}$ è aperto, dunque, per definizione di sottospazio topologico, esiste U intorno aperto di e in X tale che $U \cap E = \{e\}$. Viceversa, se un tale aperto esiste, allora $\{e\}$ è aperto in E, dunque E è dotato della topologia discreta per quanto visto a lezione.

(b) Considero il ricoprimento aperto $\{e : e \in E\}$ di E e ne estraggo un sottoricoprimento finito $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Segue $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, dunque E è finito.

(c) S è discreto: dato $1/n$, l'aperto di $\mathbb{R}$ dato dall'intervallo $(1/n - 1/(n+1), 1/n + 1/(n+1))$ non interseca nessun punto di S eccetto $1/n$.

(d) T non è discreto: ogni aperto di $\mathbb{R}$ contenente lo 0 contiene almeno un punto di S.

(e) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ ma non discreto: ogni aperto in $\mathbb{R}$ di un punto $x \in \mathbb{Q}$ contiene almeno un altro punto $y \neq x$, $y \in \mathbb{Q}$ per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

(f) La componente connessa di $x \in \mathbb{Q}$ è $\{x\}$. Basta mostrare che se $y \in \mathbb{Q}$ e $y \neq x$, allora x e y appartengono a due insiemi aperti e chiusi disgiunti. Suppongo $x < y$. Scelgo $z \in \mathbb{R}$, $z \notin \mathbb{Q}$, $x < z < y$. Allora $A = (-\infty, z] \cap \mathbb{Q} = (-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$ e $B = [z, +\infty) \cap \mathbb{Q} = (z, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ sono aperti e chiusi in $\mathbb{Q}$ (per definizione di topologia indotta), $A \cap B = \emptyset$, $x \in A$ e $y \in B$. Ragiono in modo analogo se $y < x$. $\square$

Date: 20/9/2021.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sfera unitaria e siano P e Q due suoi punti distinti (quindi $P \in \mathbb{S}^2$, $Q \in \mathbb{S}^2$ e $P \neq Q$). E' vero o falso che $\mathbb{S}^2 - \{P, Q\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$? Giustificare la risposta.

Svolgimento. A meno di una rotazione ρ di $\mathbb{R}^3$ (che induce per restrizione un omeomorfismo di $\mathbb{S}^2$) posso supporre che P coincida con il polo nord $N = (0, 0, 1)$. La proiezione stereografica p induce in omeomorfismo tra $\mathbb{S}^2 - \{P, Q\}$ e $\mathbb{R}^2 - \{a\}$ per un $a \in \mathbb{R}^2$. La traslazione τ_a definita da $x \mapsto x - a$ stabilisce un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2 - \{a\}$ e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo, da cui deduco il risultato per composizione: $\tau_a \circ p \circ \rho$ è un omoeomorfismo tra $\mathbb{S}^2 - \{P, Q\}$ e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. □

Esercizio 3. Siano $a > 0$ e $b > 0$ due numeri reali. Definiamo la superficie S tramite la parametrizzazione $x(u, v) = (av \cos(u), av \sin(u), bu)$ dove $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la curvatura gaussiana di S.

Svolgimento. Confrontare con il testo di Sernesi, dove questo esercizio è svolto tra gli esempi. □