GEOMETRIA 2 - Parte B

Corso di Laurea in Matematica

Appello 08/07/2021 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. (a) Dopo aver ricordato le definizioni di *connessione*, *connessione per archi* e *locale connessione per archi* dimostrare che se uno spazio topologico è connesso e localmente connesso per archi, allora è connesso per archi.

(b) Trovare un esempio di spazio topologico che sia connesso ma non connesso per archi, dimostrando sia la connessione che la non-connessione per archi.

(c) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva tra due spazi topologici. Supponiamo che Y sia connesso, $f^{-1}(y)$ sia connesso per ogni $y \in Y$ e che f sia aperta. Dimostrare che X è connesso.

Esercizio 2. (a) Trovare una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, diversa da quella banale, con la quale $\mathbb{R}$ risulta compatto; si richiede di dimostrare esplicitamente che $\mathcal{T}$ è una topologia e che da ogni ricoprimento di $\mathbb{R}$ fatto da aperti di $\mathcal{T}$ può essere estratto un sottoricoprimento finito.

(b) Sia $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ una successione di chiusi e compatti di uno spazio topologico X. Dimostrare che $\cap_n K_n \neq \emptyset$.

(c) Siano X uno spazio topologico compatto e $f : \mathbb{R} \to X$ una funzione continua e chiusa. Dimostrare che esiste $x \in X$ tale che $f^{-1}(x)$ sia un insieme con infiniti elementi. (Suggerimento: considerare gli intervalli $[n, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, la loro immagine in X, ed applicare il punto precedente di questo esercizio.)

Esercizio 3. Sia S la superficie di equazione $z = xy^2$ di $\mathbb{R}^3$, descritta dalla parametrizzazione $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $x(u, v) = (u, v, uv^2)$.

(a) Calcolare la prima forma fondamentale di S.

(b) Calcolare la seconda forma fondamentale di S.

(c) Calcolare la curvatura gaussiana di S e dimostrare che $K \leq 0$ in ogni punto, e che $K = 0$ se e solo se $y = 0$.