

June 29, 2022

GEOMETRIA 2 PARTE B
30 GIUGNO 2022

Durata: 2 ore. Tutte le risposte devono essere giustificate, fornendo esempi, controesempi o dimostrazioni appropriate.

Esercizio 1. Sia $n \geq 1$ un intero.

- (a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è chiuso in $M_{n \times n}(\mathbb{R})$?
- (b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è compatto in $M_{n \times n}(\mathbb{R})$?
- (c) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è connesso?
- (d) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ è connesso?

Esercizio 2. Una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ si dice *propria* se per ogni compatto $K \subseteq Y$ si ha che $f^{-1}(K)$ è compatto in X . Mostrare che se $f : X \rightarrow Y$ è continua, X è compatto e Y è T_2 , allora f è propria.

Esercizio 3. Siano a, b due reali positivi e $U = (0, \pi) \times (0, \pi)$. Definiamo la parametrizzazione $x : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ tramite la formula

$$x(u, v) = (a \cos(u), b \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v)).$$

Dopo aver verificato l'immagine di questa parametrizzazione è un aperto dell'ellissoide descritta dall'equazione $Q : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$ in $\mathbb{R}^3$, calcolarne la matrice della prima e della seconda forma fondamentale rispetto alla base canonica dello spazio tangente $\{x_u, x_v\}$ e la curvatura gaussiana.