

August 29, 2022

GEOMETRIA 2 PARTE B
31 AGOSTO 2022

Durata: 2 ore. Tutte le risposte devono essere giustificate, fornendo esempi, controesempi o dimostrazioni appropriate.

Esercizio 1. Siano X e Y due spazi topologici compatti. Dimostrare che $X \times Y$ è compatto.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la retta proiettiva complessa, dotata della topologia quoziente canonica. Fisso $P = [a; b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e definisco i sottospazi

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{P\}, \\ Y &= \{[e^{i\theta}, 1] = [\cos(\theta) + i \sin(\theta); 1] \mid \theta \in [0, 2\pi]\} \\ Z &= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus Y. \end{aligned}$$

- (a) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è compatto? $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è connesso? Quante sono le sue componenti connesse?
- (b) X è compatto? X è connesso? Quante sono le sue componenti connesse?
- (c) Y è compatto? Y è connesso? Quante sono le sue componenti connesse?
- (d) Z è compatto? Z è connesso? Quante sono le sue componenti connesse?

Esercizio 3. Determinare triedro di Frenet, curvatura e torsione della curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. La curva γ è contenuta in un piano di \mathbb{R}^3 ?