

GEOMETRIA 2, PARTE B

M. LONGO, E. MISTRETTA

Esercizio 1. Sia X uno spazio di Hausdorff e siano K ed L due sottoinsiemi compatti e disgiunti. Dimostrare che esistono due aperti disgiunti U e V tali che $K \subseteq U$ e $L \subseteq V$.

Soluzione. Fisso un punto $x \in K$. Per ogni $y \in L$ scelgo due intorni aperti $U_x(y)$ e $V_y(x)$ tali che $U_x(y) \cap V_y(x) = \emptyset$. Poiché L è compatto e $\{V_y(x) : y \in L\}$ è un ricoprimento aperto di L , estraggo un sottoricoprimento finito $\mathcal{V}_x = \{V_{y_1}(x), \dots, V_{y_n}(x)\}$. Definisco $V_x = \cup_{i=1}^n V_{y_i}(x)$. Allora $W_x = U_x(y_1) \cap \dots \cap U_x(y_n)$ è un intorno di x tale che $W_x \cap V_x = \emptyset$: se $z \in W_x \cap V_x$, allora $z \in V_{y_i}(x)$ per qualche i , ma $U_x(y_i) \cap V_{y_i}(x) = \emptyset$, quindi anche $W_x \cap V_x = \emptyset$. Notiamo inoltre che per ogni $x \in K$ abbiamo $L \subseteq V_x$. Poiché K è compatto, e $\{W_x : x \in K\}$ è un ricoprimento di K , estraggo un sottoricoprimento finito $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$. Definisco $U = \cup_{i=1}^m W_{x_i}$ e $V = \cap_{i=1}^m V_{x_i}$. Segue che U è un aperto che contiene K e che V è un aperto che contiene L . Se $z \in U \cap V$, allora $z \in W_{x_i}$ per qualche i , e $z \in V_{x_i}$ dalla definizione di V ; ma $W_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$. □

Esercizio 2. Indichiamo con

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

il disco chiuso e con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

il disco aperto. Siano a, b, c, d quattro numeri reali tali che $a < b$ e $c < d$. Dimostrare i seguenti fatti:

- (a) Il rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ è omeomorfo al disco chiuso $\overline{D}$.
- (b) L'interno $(a, b) \times (c, d)$ del rettangolo R è omeomorfo al disco aperto D .
- (c) $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo al disco aperto D .
- (d) Il disco aperto D ed il disco chiuso $\overline{D}$ non sono omeomorfi tra loro.

Soluzione. Vedere gli appunti o il libro di testo. □

Esercizio 3. Sia G un sottogruppo del gruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico di Hausdorff X . Supponiamo che per ogni coppia di punti x ed y di X esistano un intorno aperto U di x e un intorno V di y tali che $g(U) \cap V \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $g \in G$. Dimostrare che lo spazio quoziente X/G è di Hausdorff.

Soluzione. Fisso x, y gli intorno U e V come nel testo, e indico con $g_1, \dots, g_n$ gli elementi di G tali che $g_i(U) \cap V \neq \emptyset$. Se x ed y sono due classi distinte di X/G , allora $g_i(x) \neq y$, dunque esistono due intorno U_i di $g_i(x)$ e V_i di y tali che $U_i \cap V_i = \emptyset$. Sia $V' = V \cap_{i=1}^n V_i$, $W_i = g_i^{-1}(U_i)$ e $U' = U \cap_{i=1}^n W_i$. Allora $g(U') \cap V' = \emptyset$ per tutti i $g \in G$: se $g \neq g_i$, allora $g(U') \cap V' \subseteq g(U) \cap V = \emptyset$, mentre se $g = g_i$, allora $g_i(U') \cap V' \subseteq g_i(W_i) \cap V_i = \emptyset$. Abbiamo quindi mostrato che se $[x] \neq [y]$ in X/G , allora esiste un intorno $\bar{U} = \pi(U')$ ed un intorno $\bar{V} = \pi(V')$ in X/G tali che $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, dove con $\pi : X \rightarrow X/G$ abbiamo indicato la proiezione canonica; dunque X/G è di Hausdorff. $\square$

Esercizio 4. Fissiamo due numeri reali $a > 0$ e $b < 0$. La *spirale logaritmica* è la curva piana $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $t \mapsto (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$.

- (a) Indichiamo con (r, θ) le coordinate polari di $\mathbb{R}^2$, scrivendo dunque un qualunque punto (x, y) di $\mathbb{R}^2$ come $(x, y) = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Dimostrare che i punti della spirale logaritmica soddisfano l'equazione $r = ae^{b\theta}$ e tracciare un suo grafico approssimativo. Mostrare che la successione $n \mapsto \sigma(n)$ ha come limite $(0, 0)$.
- (b) Calcolare la curvatura di σ .

Soluzione. Si noti che $r^2 = x^2 + y^2 = a^2 e^{2bt} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = a^2 e^{2bt}$, e poiché tutte le quantità sono positive, ricaviamo immediatamente il primo asserto. Il limite si calcola in modo immediato. Per la curvatura, notare che

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= ae^{bt}(b \cos(t) - \sin(t), b \sin(t) + \cos(t)), \\ \|\sigma'(t)\| &= ae^{bt} \sqrt{b^2 + 1} \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} \sigma''(t) &= abe^{bt}(b \cos(t) - \sin(t), b \sin(t) + \cos(t)) + ae^{bt}(-b \sin(t) - \cos(t), b \cos(t) - \sin(t)) \\ &= ae^{bt}(b^2 \cos(t) - 2b \sin(t) - \cos(t), b^2 \sin(t) + 2b \cos(t) - \sin(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\|\sigma'(t) \wedge \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3} \\ &= \frac{-(b^2 - 1) \sin^2(t) + 2b^2 \cos^2(t) - (b^2 - 1) \cos^2(t) + 2b^2 \sin^2(t)}{ae^{bt}(b^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{2b^2 - (b^2 - 1)}{ae^{bt}(b^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{b^2 + 1}{ae^{bt}(b^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{ae^{bt}(b^2 + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

$\square$