

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
PRIMO APPELLO, 15 GIUGNO 2010
VERSIONE A

Esercizio 1. Al variare del parametro reale a , si consideri l'endomorfismo $L_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni:

$$L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - a^2 \\ 2 \\ a - 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Dopo aver espresso il vettore $(0, 0, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$, si calcoli $L_a((0, 0, 1))$.
- (2) Si scriva la matrice A_a di L_a rispetto alla base canonica $\mathcal{C} := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.
- (3) Per $a = 0$, si calcoli il nucleo $\ker(L_0)$ di L_0 e l'immagine $\text{im}(L_0)$ di L_0 .
- (4) Si dica per quali valori del parametro a la matrice A_a è diagonalizzabile.
- (5) Dopo aver verificato che per $a = 2$ la matrice A_2 è diagonalizzabile, si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_2 .
- (6) Si determinino una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che $H^{-1}A_2H = D$.

Svolgimento. (1) Il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ammette come unica soluzione la terna $x + 1, y = -1, z = -1$, quindi posso esprimere $(0, 0, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché L_a è una funzione lineare, ottengo da questa relazione:

$$L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_a \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sostituendo i valori di $L_a(1, 1, 1)$, $L_a(1, 0, 0)$ ed $L_a(0, 1, 0)$ che vengono dati nell'esercizio ottengo

$$L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - a^2 \\ 2 \\ a - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a - a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Poiché

$$L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dell'applicazione lineare L_a rispetto alla base canonica si determina immediatamente:

$$A_a = \begin{pmatrix} a & a - a^2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Per $a = 0$ ottengo la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo $\ker(L_0)$ è definito come l'insieme dei vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $L_0(v) = 0$. Le coordinate (x, y, z) rispetto alla base canonica di questi vettori soddisfano dunque l'equazione:

$$A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Otengo dunque:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} 0 & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ -x & = & 0. \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione l'insieme $\{(0, t, -t) | t \in \mathbb{R}\}$, ovvero:

$$\ker(L_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dalla formula di Grassmann (si confronti con il Teorema 7.9 del libro di Moresco) si ottiene che la somma della dimensione del nucleo e dell'immagine di L_0 deve essere pari a 3, che è la dimensione del dominio dell'applicazione lineare L_0 . Poichè la dimensione del nucleo di L_0 è 1 (per quanto mostrato sopra) segue che la dimensione dell'immagine è 2. D'altra parte, l'immagine di L_0 è generata dall'immagine dei vettori di base di $\mathbb{R}^3$, ovvero del dominio di L_0 . Segue che l'immagine di L_0 è generata dai vettori $(0, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 0)$ (corrispondenti alle colonne di A_0). Quindi, avendo dimensione 2, deve essere:

$$\operatorname{im}(L_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Osservo che, chiaramente, potevo giungere alla stessa conclusione senza esaminare preliminarmente la dimensione dell'immagine di L_0 , visto che tra i generatori dell'immagine di L_0 compare due volte lo stesso vettore $(0, 1, 0)$ ed i due vettori $(0, 0, -1)$ e $(0, 1, 0)$ sono tra loro linearmente indipendenti, non essendo l'uno un multiplo dell'altro.

(4) Sia $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolo il polinomio caratteristico di A_a :

$$p_{A_a}(t) = \det(A_a - tI_3) = \det \left(\begin{pmatrix} a & a - a^2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a - t & a - a^2 & a \\ 0 & 1 - t & 1 \\ -1 & a & -t \end{pmatrix}.$$

Sviluppando secondo la prima colonna ottengo:

$$\begin{aligned} p_{A_a}(t) &= (a - t)(-t(1 - t) - a) - (a - a^2 - a + at) \\ &= (a - t)(t^2 - t - a) + a(a - t) \\ &= (a - t)(t^2 - t) \\ &= -t(t - 1)(t - a). \end{aligned}$$

Gli autovalori di A_a sono dunque $\{0, 1, a\}$. Se questi tre valori sono tutti distinti, ovvero se $a \neq 0$ e $a \neq 1$, allora la matrice A_a è diagonalizzabile (si confronti con il Teorema 13.14 e la discussione che segue nel libro di Moresco). I casi rimanenti $a = 0$ e $a = 1$ vanno trattati a parte. Se $a = 0$ il polinomio caratteristico di A_0 è $p_{A_0}(t) = -t^2(t - 1)$, perciò la matrice A_0 è diagonalizzabile se e solo se la dimensione del suo autospazio relativo all'autovalore 0 è 2. Nel punto (3) abbiamo visto che il nucleo $\ker(L_0)$ ha dimensione 1. Poiché il nucleo di L_0 consiste nell'autospazio di A_0 relativo all'autovalore 0, si conclude che A_0 non è diagonalizzabile. Per quanto riguarda A_1 , il suo polinomio caratteristico è

$p_{A_1}(t) = -t(t-1)^2$, dunque A_1 è diagonalizzabile se e solo se la dimensione del suo autospazio relativo all'autovalore 1 è pari a 2. Per trovare questo autospazio, devo risolvere il sistema:

$$A_1 \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tenuto conto del fatto che

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il sistema precedente si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x - z &= x \\ y + z &= y \\ x + y &= z. \end{cases}$$

Le equazioni del precedente sistema si semplificano e diventano $z = 0$, $y = -x$. Dunque la soluzione del sistema precedente è $\{(\alpha, -\alpha, 0) | \alpha \in \mathbb{R}\}$, ovvero sono il sottospazio vettoriale

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Poiché tale sottospazio ha dimensione 1, segue che A_1 non è diagonalizzabile.

In conclusione, A_a è diagonalizzabile se e solo se $a \notin \{0, 1\}$.

(5) La conclusione del punto precedente ci dice subito che A_2 è diagonalizzabile. Il suoi autovalori sono 0, 1, 2. Determino quindi gli autospazi corrispondenti. Devo quindi risolvere i sistemi

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

per $\lambda = 0, 1, 2$, dove

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = 0$, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 2y + 2z &= 0 \\ z &= -y \\ x &= 2y \end{cases}$$

Sostituendo le ultime due equazioni nella prima equazione ottengo l'identità $4y - 2y - 2y = 0$ (questo a posteriori conferma il fatto che 0 sia un autovalore, in quanto se questa equazione non fosse stata un'identità allora l'unica soluzione del sistema omogeneo considerato sarebbe stata quella nulla, contrariamente al fatto che almeno una soluzione non nulla ci deve essere, visto che 0 è un autovalore). Dunque, l'autospazio relativo all'autovalore 0 è

$$V_0^{A_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Risolvendo i sistemi analoghi per gli autovalori 1 e 2 ottengo gli autospazi

$$V_1^{A_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2^{A_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dunque

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_2 (ricordo che non è necessario controllare che $\mathcal{B}$ sia in effetti una base: autovettori relativi ad autovalori distinti sono tra loro linearmente indipendenti. Si confronti con il Teorema 13.13 del libro di Moresco).

(6) Sia H la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Sarà dunque

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posto allora

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avremo allora

$$H^{-1}A_2H = D.$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- (1) Si calcoli la dimensione di U e se ne trovi una base.
- (2) Si determini l'ortogonale $U^\perp$ di U .
- (3) Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$.
- (4) Sia $p_U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ su U . Si esibisca una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di p_U è:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (5) Si trovi la matrice A della proiezione ortogonale $p_U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ su U rispetto alla base canonica $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^4$.
- (6) Si trovi una matrice H tale che $D = H^{-1}AH$, dove la matrice A è definita nel punto (5) mentre la matrice D è definita nel punto (4).

Soluzione (1) Il terzo generatore di U è somma dei primi due

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè i primi due vettori sono tra loro linearmente indipendenti, non essendo l'uno un multiplo dell'altro, si ottiene immediatamente che U ha dimensione 2 e

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ne è una base.

(2) Per determinare il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ortogonale a U basta imporre la condizione di ortogonalità tra un generico vettore di $\mathbb{R}^4$ e tutti i vettori della base di U . Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} (1, 1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \\ (1, 0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} w = -x - y \\ z = -x. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema può dunque essere espressa per mezzo dei parametri t e s come l'insieme $\{(t, s, -t, -t-s) | t, s \in \mathbb{R}\}$, ovvero otteniamo che

$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(3) Basta controllare che l'insieme

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ottenuto unendo la base di U e quella di $U^\perp$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Per far questo, basta controllare che il determinante della matrice che ha per colonne questi vettori è non nullo. Ottengo:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = +3 \neq 0 \end{aligned}$$

(per la prima uguaglianza ho sottratto la quarta colonna dalla prima colonna, per la seconda uguaglianza ho sviluppato secondo l'ultima riga, per la terza uguaglianza ho sottratto la prima riga dalla terza riga, per la quarta uguaglianza ho sviluppato secondo la seconda colonna).

(4) Ricordo la definizione di proiezione. Dati due sottospazi U e W di uno spazio V , tali che $V = U \oplus W$, posso scrivere in modo unico ogni vettore v di V come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Definisco allora la proiezione $p_U^W(v) := u$. Se $W = U^\perp$, scrivo semplicemente p_U e dico che la proiezione è *ortogonale*. Da questo risulta chiaro che $p_U(u) = u$ per ogni $u \in U$ e che $p_U(w) = 0$ per ogni $w \in U^\perp$, visto che $u = u + 0$ e $w = 0 + w$. Segue che rispetto alla base

$$(1) \quad \mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in cui i primi due vettori sono in $U^\perp$ ed i secondi due vettori in U , la matrice di p_U ha la forma richiesta.

(5) Per trovare la matrice di p_U rispetto alla base canonica, posso operare in vari modi. Un modo consiste nel calcolare direttamente la proiezione dei vettori della base canonica, ovvero calcolare $p_U(1, 0, 0, 0)$, $p_U(0, 1, 0, 0)$, $p_U(0, 0, 1, 0)$ e $p_U(0, 0, 0, 1)$. Per far questo, esprimo i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori di U e $U^\perp$ e poi ne prendo la componente in U .

Per il primo vettore della base canonica ho:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dunque risulta:

$$p_U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Dunque, questa è la prima colonna della matrice cercata. Svolgendo i calcoli per tutti gli altri vettori di base, ottengo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Un altro metodo consiste nello sfruttare il fatto che la proiezione richiesta è ortogonale (il metodo precedente funziona infatti per qualunque proiezione, non solo per quelle in cui $W = U^\perp$). Utilizzando Gram-Schmidt ottengo una base ortonormale di U . Definisco

$$w_1 = \frac{(1, 1, 0, 1)}{\|(1, 1, 0, 1)\|} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3})$$

$$w'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left((1, 0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Posto

$$w_2 = \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

ottengo allora che $\{w_1, w_2\}$ è una base ortonormale di U . Perciò la proiezione ortogonale posso calcolarla anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} p_U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left((1, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + \left((1, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/15 \\ -2/15 \\ 6/15 \\ -2/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ritrovo quindi il risultato ottenuto in precedenza. Facendo lo stesso processo per gli altri vettori della base canonica, ottengo la matrice richiesta.

(6) La matrice richiesta è quella del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ definita in (1) alla base canonica, ovvero la matrice

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{S}^3$ lo spazio affine di dimensione 3 in cui fissiamo un riferimento ortonormale. Sia r la retta passante per il punto $P = (1, -1, 1)$ e parallela al sottospazio $U = \langle (1, 2, 1) \rangle$. Sia inoltre s la retta di equazione cartesiana

$$s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 4z - 11 = 0 \end{cases}$$

Sia infine π il piano di equazione cartesiana

$$\pi : x + y + z - 1 = 0.$$

- (1) Si determini la posizione reciproca di r ed s .
- (2) Si determinino la distanza tra le due rette, i punti di minima distanza e la retta di minima distanza.
- (3) Si determini la proiezione ortogonale di r sul piano π .

Svolgimento Ricavo per prima cosa le equazioni cartesiane della retta r . Un punto (x, y, z) appartiene ad r se e solo se il vettore $(x - 1, y + 1, z - 1)$ (ottenuto sottraendo le coordinate del punto (x, y, z) e quelle del punto $(1, -1, 1) \in r$) è un multiplo del vettore $(1, 2, 1)$, che genera il sottospazio direttore di r . Questo è equivalente a richiedere che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ y+1 & 2 \\ z-1 & 1 \end{pmatrix}$$

sia 2, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ y+1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ z-1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} y+1 & 2 \\ z-1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando ed eliminando una delle tre equazioni, che risulta combinazione lineare delle altre, si ottiene:

$$r : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Ricavo inoltre un punto ed il sottospazio direttore di s . Per far questo, noto che $(4, 4, 1)$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad s , ovvero

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 4z = 0, \end{cases}$$

e che $(-1, 2, -3)$ è soluzione del sistema che definisce s . Perciò, s è la retta passante per $(-1, 2, -3)$ e parallela al vettore $(4, 4, 1)$.

- (1) L'intersezione di r ed s si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ x - 4z - 11 = 0. \end{cases}$$

Lo scrivo in forma matriciale

$$A \cdot X = b$$

con

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Considero la matrice completa del sistema

$$C := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

ed osservo che il rango di C è 4 mentre quello di A è 3. Questo basta per concludere che le due rette sono sghembe: esse infatti hanno intersezione vuota (il rango della matrice completa C è diverso dal

rango della matrice incompleta A) e la soluzione del sistema omogeneo associato $AX = 0$ ha solo la soluzione nulla (in quanto il rango di A è 3) quindi le rette non sono parallele (se lo fossero, avrebbero lo stesso spazio direttore, che si ottiene come soluzione del sistema omogeneo $AX = 0$). Per maggiori dettagli, si confronti il paragrafo 21.9 ed il Teorema di Roucé-Capelli 11.4 del libro di Moresco.

(2) Ci sono molti possibili approcci, ciascuno dei quali fornisce in modo diretto almeno una delle risposte. Per cominciare, posso determinare facilmente la direzione ortogonale sia al sottospazio direttore di r che a quello di s . Devo dunque risolvere il sistema:

$$\begin{cases} (1, 2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (4, 4, 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene che la soluzione è il sottospazio vettoriale generato da $(2, -3, 4)$. Perciò la retta di minima distanza, che denoto con t , ha direzione $(2, -3, 4)$, dovendo essere perpendicolare sia ad r che ad s .

A questo punto posso determinare il piano π_1 parallelo alla retta di minima distanza t e contenente r ed il piano π_2 parallelo a t e contenente s . Il piano π_1 passa per un qualunque punto di r , ad esempio $P = (1, -1, 1)$ ed il suo sottospazio direttore è generato da $(1, 2, 1)$ e $(2, -3, 4)$ (il primo vettore genera il sottospazio direttore di r ed il secondo quello di t). Allo stesso modo, il piano π_2 passa per un punto qualunque di s , ad esempio $Q = (-1, 2, -1)$, ed il suo sottospazio direttore è generato da $(4, 4, 1)$ e $(2, -3, 4)$ (il primo vettore genera il sottospazio direttore di s ed il secondo quello di t). Questo mi fornisce le equazioni cartesiane di π_1 e π_2 :

$$\pi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha - 3\beta \\ \alpha + 4\beta \end{pmatrix}$$

al variare dei parametri α e β in $\mathbb{R}$. Imponendo che il vettore $(x - 1, y + 1, z - 1)$ sia combinazione lineare dei vettori $(1, 2, 1)$ e $(2, -3, 4)$ ottengo invece le equazioni cartesiane di π_1 . Questa condizione di traduce nella condizione:

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & -3 \\ z-1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

da cui, sviluppando i calcoli, ottengo:

$$11x - 2y - 7z - 6 = 0.$$

Facendo lo stesso ragionamento per il secondo piano ottengo

$$\pi_2 : 19x - 14y - 20z - 13 = 0.$$

La retta t deve essere contenuta in entrambi questi piani, visto che è incidente e perpendicolare sia ad r che ad s (ad esempio, essendo incidente e perpendicolare ad r , essa è contenuta in un piano che contiene r e che è parallelo al sottospazio direttore di t , ovvero π_1 ; ragionamento analogo per π_2). Ottengo quindi le equazioni cartesiane di t :

$$t : \begin{cases} 11x - 2y - 7z - 6 = 0 \\ 19x - 14y - 20z - 13 = 0 \end{cases}$$

Per ottenere i punti di minima distanza posso intersecare t con r ed s . Fornisco però un metodo alternativo. Un qualunque punto di r è del tipo $(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha)$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, mentre un qualunque punto di s è del tipo $(-1 + 4\beta, 2 + 4\beta, -3 + \beta)$ per qualche $\beta \in \mathbb{R}$ (utilizzare il fatto che di entrambe le rette conosciamo un punto ed il sottospazio direttore; ad esempio, per r sappiamo che passa per $(1, -1, 1)$ e che il suo sottospazio direttore è $(1, 2, 1)$, quindi tutti i suoi punti appartengono all'insieme $(1, -1, 1) + \langle (1, 2, 1) \rangle$, che coincide con l'espressione trovata precedentemente; ragionamento

analogo per s). Dunque, un qualunque vettore ottenuto dalla differenza tra un punto di r ed un punto di s sarà della forma

$$\begin{pmatrix} 2 + \alpha - 4\beta \\ -3 + 2\alpha - 4\beta \\ 4 + \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

per una scelta di α, β in $\mathbb{R}$. I punti di minima distanza sono quelli per i quali questo vettore è ortogonale sia al sottospazio direttore di r che a quello di s , ovvero soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} (1, 2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 + \alpha - 4\beta \\ -3 + 2\alpha - 4\beta \\ 4 + \alpha - \beta \end{pmatrix} = 0 \\ (4, 4, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 + \alpha - 4\beta \\ -3 + 2\alpha - 4\beta \\ 4 + \alpha - \beta \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Il precedente sistema ha come unica soluzione $\alpha = \beta = 0$, da cui ricavo i punti di minima distanza $P = (1, -1, 1)$ e $Q = (-1, 2, -3)$. La distanza d richiesta può essere ottenuta facendo la norma del vettore $\vec{QP}$:

$$d = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{29}.$$

Un altro modo per trovare questa distanza poteva essere il seguente: considerare il piano π_3 contenente s e parallelo ad r e trovare la distanza tra questo piano ed un qualunque punto di r .

(3) Il punto di intersezione tra r e π si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $(1, -1, 1)$. Un altro punto di r è $R = (2, 1, 2)$. La direzione ortogonale a π è $(1, 1, 1)$, quindi la retta passante per R ed ortogonale a π è la retta passante per R di sottospazio direttore $\langle (1, 1, 1) \rangle$. Si ricava immediatamente che le sue equazioni cartesiane sono:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Intersecando con π

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

ottengo la proiezione di R su π , che risulta essere il punto $S = (2/3, -1/3, 2/3)$. La retta cercata è quindi quella passante per $R = (2, 1, 2)$ di sottospazio direttore $\vec{SR} = \langle (1/3, -2/3, 1/3) \rangle = \langle (1, -2, 1) \rangle$.

Esercizio 4. Sia $f(X) = (X - 1)^4 + 16 \in \mathbb{R}[X]$.

- (1) Si determinino le soluzioni dell'equazione $(z - 1)^4 = -16$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi (suggerimento: si consideri il cambio di variabile $\xi := z - 1$).
- (2) Si scriva una fattorizzazione del polinomio $f(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$.
- (3) Si scriva una fattorizzazione del polinomio $f(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$.

Svolgimento (1) Risolvo prima l'equazione $\xi^4 = -16$. Osservo che $-16 = 2^4 \cdot (-1)$. Poichè

$$-1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

risulta

$$-16 = 16(\cos(\pi) + i \sin(\pi)).$$

Le radici quarte di $\cos(\pi) + i \sin(\pi)$ sono date dalla formula:

$$\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Sostituendo $k = 0, 1, 2, 3$ e tenendo conto delle formule trigonometriche per il seno ed il coseno di $\pi/4 + k\pi/2$ ottengo i quattro numeri

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Le soluzioni dell'equazione $\xi^4 = -16$ si ottengono allora moltiplicando per la radice quarta di 16, ovvero 2, e sono quindi

$$\xi \in \left\{ \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \right\}.$$

Le soluzioni dell'equazione $(z - 1)^4 = -16$ si ottengono allora per sostituzione e risultano:

$$z = \xi + 1 \in \left\{ 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad 1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad 1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} \right\}.$$

(2) La fattorizzazione in $\mathbb{C}[X]$ del polinomio $f(X)$ si ottiene moltiplicando tra loro i fattori di primo grado $X - z_i$ con z_0, z_2, z_2, z_3 le soluzioni dell'equazione $f(X) = 0$. Ottengo

$$f(X) = (X - (1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}))(X - (1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}))(X - (1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}))(X - (1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2})).$$

(3) Moltiplicando tra loro i fattori che contengono radici complesse tra loro coniugate ottengo:

$$(X - (1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}))(X - (1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2})) = ((X - 1 - \sqrt{2})^2 + 2)$$

$$(X - (1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}))(X - (1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2})) = ((X - 1 + \sqrt{2})^2 + 2)$$

(usare la formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ con $a = X - 1 \pm \sqrt{2}$ e $b = i\sqrt{2}$ e notare che $-(i\sqrt{2})^2 = -i^2\sqrt{2}^2 = -(-1) \cdot 2 = 2$) da cui segue che una fattorizzazione in fattori irriducibili di $f(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ è

$$f(X) = ((X - 1 - \sqrt{2})^2 + 2)((X - 1 + \sqrt{2})^2 + 2).$$

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$. Siano $v_1 \in \mathbb{R}^n$ e $v_2 \in \mathbb{R}^n$ due autovettori di L di autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$; si avrà dunque $L(v_1) = \lambda \cdot v_1$ e $L(v_2) = \lambda \cdot v_2$. Sia infine $v_3 \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di autovalore $\mu \in \mathbb{R}$. Si provi che se $\lambda \neq \mu$ e v_1, v_2 sono indipendenti, allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Svolgimento. Supponiamo che

$$(2) \quad xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

sia una combinazione lineare nulla di v_1, v_2, v_3 a coefficienti $x, y, z \in \mathbb{R}$. Per mostrare che v_1, v_2, v_3 sono tra loro indipendenti devo quindi provare che $x = y = z = 0$. Applicando L all'equazione (2) ed utilizzando il fatto che v_1, v_2, v_3 sono autovettori per L di autovalori λ, λ, μ , rispettivamente, ottengo:

$$(3) \quad \lambda xv_1 + \lambda yv_2 + \mu zv_3 = 0.$$

D'altra parte, moltiplicando (2) per λ , ottengo

$$(4) \quad \lambda xv_1 + \lambda yv_2 + \lambda zv_3 = 0.$$

Sottraendo (3) ed (4) ottengo $(\lambda - \mu)zv_3 = 0$. Poichè v_3 non è il vettore nullo (per definizione di autovettore) e $\lambda \neq \mu$, ottengo $z = 0$. Sostituendo nella (2), ottengo $xv_1 + yv_2 = 0$. Ma v_1, v_2 sono linearmente indipendenti per ipotesi, quindi ricavo $x = y = 0$. Perciò $x = y = z = 0$ e la tesi è provata.