APPELLO STRAORDINARIO
FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
18 DICEMBRE 2014
DOCENTE: M. LONGO

1. Domande

Domanda 1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita.

(1) Sia φ un endomorfismo di$V$. Supponiamo che $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \varphi$. Dimostrare che $\ker(\varphi)$ e $\mathrm{im}(\varphi)$ sono in somma diretta e che $\ker(\varphi) \oplus \mathrm{im}(\varphi) = V$.
(2) Dare la definizione di proiezione $p_{U,W} : V \to V$ su un sottospazio U lungo la direzione W. Concludere che l'endomorfismo φ al punto (1) è la proiezione su $\mathrm{im}(\varphi)$ lungo $\ker(\varphi)$.

Domanda 2. Sia f un polinomio a coefficienti reali di grado $n \geq 1$.

(1) Dimostrare che se ξ è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, allora anche il suo complesso coniugato $\bar{\xi}$ lo è.
(2) Utilizzando quanto dimostrato al punto precedente, dimostrare che tutti i polinomi a coefficienti reali di grado dispari hanno almeno una radice reale.

Domanda 3. Enunciare il teorema di Rouché-Capelli sulla risolubilità di un sistema linare $AX = B$, dando condizioni necessarie e sufficienti affinché un tale sistema sia risolubile ed illustrando la struttura dell'insieme delle sue soluzioni, qualora ne esistano.

Domanda 4. Enunciare il teorema di sulla diagonalizzabilità di un endomorfismo $f : V \to V$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita: in particolare, defire il concetto di autospazio, descriverne la dimensione e dare condizioni necessarie per la diagonalizzabilità di f.

2. Esercizi

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle matrici a due righe e due colonne a coefficienti in $\mathbb{R}$ ed indichiamone con $\mathcal{C} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ la base canonica.

(1) Dimostrare che l'insieme
$$\mathcal{B} = \{B_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), B_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), B_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), B_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$
è una base di V.
(2) Si scriva la matrice di cambio di base P dalla base $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ e la matrice di cambio di base P^{-1} dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$.
(3) Sia ϕ_a l'endomorfismo di V definito sulla base $\mathcal{B}$ dalle condizioni seguenti:
$$\phi_a(B_1) = 0, \quad \phi_a(B_2) = a(a-1)B_1, \quad \phi_a(B_3) = B_3, \quad \phi_a(B_4) = a(a+1)B_3 + B_4.$$
Scrivere la matrice di ϕ_a rispetto alla base $\mathcal{B}$ e la matrice di ϕ_a rispetto alla base $\mathcal{C}$.

(4) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di ϕ_a al variare del parametro a.

Svolgimento. Matrici di cambio di base:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le due matrici di ϕ_a sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a(a+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -a & 2a & a \\ a-2 & -a+2 & 2a-2 & -2a^2-a-1 \\ -1 & 1 & -1 & -a^2-a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 2. Sia f_a l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, è rappresentato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} a & -a & 2a & a \\ a-2 & -a+2 & 2a-2 & -2a^2-a-1 \\ -1 & 1 & -1 & -a^2-a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

(1) Discutere la diagonalizzabilità di f_a al variare di a.
(2) In tutti i casi in cui f_a è diagonalizzabile, trovarne una base di autovettori.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $(1,1,0,0), (0,1,1,1), (1,2,1,1)$ e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni:

$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Trovare la dimensione ed una base di U.
(2) Trovare la dimensione ed una base di W.
(3) Trovare la dimensione ed una base di $U \cap W$.
(4) Trovare la dimensione di $U + W$ e completare una base di $U \cap W$ ad una base di $U + W$.

Esercizio 4. Sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

ed s la retta passante per il punto $(1, -1, -1)$ ed il cui spazio direttore è generato dal vettore $(0, 1, -1)$.

(1) Trovare l'equazione parametrica di r.
(2) Trovare l'equazione cartesiana di s.
(3) Stabilire la posizione reciproca di r ed s.
(4) Trovare la retta t che interseca sia r che s ed è parallela alla retta $q : (0, 0, 0) + \langle(1, 2, -1)\rangle$.
(5) Sia π il piano che contiene q e t. Posto $P = (1, 0, -2)$ e $Q = (0, 0, 0)$, verificare che P e Q appartengono entrambi a π e determinare almeno un quadrato di lato PQ contenuto in π.

Svolgimento. Le rette sono sghembe ed hanno equazioni:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff r : (1, 1, -1) + \langle(1, 1, -2)\rangle;$$

$$s : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \iff s : (1, -1, -1) + \langle(0, 1, -1)\rangle.$$

La retta t è $(1, 0, -2) + \langle(1, 2, -1)\rangle$ e π è $(0, 0, 0) + \langle(1, 2, -1), (1, 0, -2)\rangle$. $\square$