

TOPOLOGIA
APPELLO 11 LUGLIO 2016

MATTEO LONGO

Esercizio 1. Sia $I = [0, 1]$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la mappa definita da

$$f(x, y) = (x + \cos(2\pi y), 2x + y + \sin(4\pi x))$$

ed indichiamo con $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ la mappa indotta sul toro $\mathbb{T} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tramite passaggio al quoziente. Si calcoli la mappa indotta $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{T}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}, x_0)$ da φ sul gruppo fondamentale di $\mathbb{T}$ nel suo punto $x_0 = [(0, 0)]$, dove $[(x, y)]$ indica la classe di (x, y) .

Esercizio 2. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1$, dove indichiamo con $\mathbb{S}^1$ il cerchio $\mathbb{S}^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta, 0) : \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Esercizio 3. Calcolare il gruppo fondamentale del toro meno due punti.

Esercizio 4. Sia X lo spazio formato da un toro $\mathbb{T}$ ed un piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ con un solo punto in comune $x_0 \in \mathbb{T} \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Trovare tutti i ricoprimenti di X .

Esercizio 5. Supponiamo che $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sia un ricoprimento con n fogli, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Fissiamo un punto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e poniamo $x_0 := p(\tilde{x}_0)$. Dimostrare che $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ è un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ di indice n .