

TOPOLOGIA
APPELLO, 20 GIUGNO 2016

MATTEO LONGO

Esercizio 1. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ a cui sono tolti i tre assi coordinati.

Esercizio 2. Calcolare il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale meno un punto.

Esercizio 3. Sia $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ un cilindro e fissiamo p_1, p_2 due punti distinti di C . Definiamo $X = C - \{p_1, p_2\}$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p_0)$ di X in un suo punto p_0 .

Esercizio 4. Sia X lo spazio topologico formato da un piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ed un cerchio $\mathbb{S}^1$ con un solo punto, denotato x_0 , in comune.

- (1) Calcolare $\pi_1(X, x_0)$.
- (2) Calcolare $H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$, il massimo quoziente abeliano di $\pi_1(X, x_0)$.
- (3) Trovare, se possibile, uno spazio topologico Z ed un ricoprimento $p : \tilde{Z} \rightarrow Z$ tale che $\text{Aut}(\tilde{Z}/Z)$ sia isomorfo a $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$.

Esercizio 5. Siano X , Y e Z tre spazi topologici. Siano $p : X \rightarrow Y$ e $r : Y \rightarrow Z$ mappe continue. Consideriamo la loro composizione $q = r \circ p : X \rightarrow Z$.

- (1) Dimostrare che se $p : X \rightarrow Y$ e $q : X \rightarrow Z$ sono ricoprimenti, allora $r : Y \rightarrow Z$ è un ricoprimento.
- (2) Dimostrare che se Z ammette ricoprimento universale e $p : X \rightarrow Y$ e $r : Y \rightarrow Z$ sono ricoprimenti, allora $q : X \rightarrow Z$ è un ricoprimento.