

TOPOLOGIA, APPELLO 23 SETTEMBRE 2016

M. LONGO

Esercizio 1. Sia A l'unione delle quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 di $\mathbb{R}^3$ descritte dalle equazioni:

$$r_1 \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad r_2 \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad r_3 \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad r_4 \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Sia $X = \mathbb{R}^3 - A$. Trovare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ in un punto $x_0 \in X$.

Esercizio 2. Descrivere (in termini di generatori e relazioni) il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein (ottenuta identificando i lati del quadrato come al solito: se indichiamo i vertici consecutivi del quadrato con A, B, C, D , letti in senso antiorario, identificheremo i due lati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, e i due lati $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$).

Esercizio 3. Facciamo agire $\mathbb{Z}$ da sinistra su $\mathbb{C}$ tramite la formula $(m, z) \mapsto z + m$, per $m \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{C}$. Consideriamo lo spazio quoziente $X := \mathbb{Z} \backslash \mathbb{C}$. Trovare il gruppo fondamentale di X .

Esercizio 4. Trovare un ricoprimento $\tilde{X} \rightarrow X$ tale che il gruppo di automorfismi di ricoprimento $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ sia isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Esercizio 5. Sia $p : X \rightarrow Y$ un ricoprimento di Y e $q : Y \rightarrow Z$ un ricoprimento di Z . Dimostrare che se q è un ricoprimento con un numero finito di fogli, allora $q \circ p : X \rightarrow Z$ è un ricoprimento di Z .