Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

(Longo)

II prova parziale – 14 Giugno 2013 – compito A

DOMANDE

1. (a) Si dia la definizione di autovalore e di autovettore di un endomorfismo f.

   (b) Si dica per quali valori di k il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 1 \\ 2k-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   e si dica qual'é l'autovalore associato.

2. Si giustifichi la seguente affermazione: Se λ è una radice del polinomio caratteristico di f allora l'autospazio relativo a λ ha dimensione almeno 1.

3. Si discuta, utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, l'intersezione di due piani nello spazio affine reale standard $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ k-3 & 2 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
2. Per tutti i valori di k determinati al punto precedente, si trovi una base di autovettori.

(voltare pagina)

Esercizio 2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.

(b) Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da A e B.

(c) Indicato con D il punto di minima distanza di C dalla retta r passante per A e B, determinare i vertici di ogni possibile quadrato contenuto in π che ha il segmento CD come lato.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

1. Controllare che $\mathcal{V} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare una base ortogonale $\mathcal{W} = \{ w_1, w_2, w_3 \}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$, $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
3. Scrivere la matrice di cambiamento di base P dalla 'vecchia' base $\mathcal{V}$ alla 'nuova' base $\mathcal{W}$.
4. Consideriamo il sottospazio $S := \langle v_1, v_2 \rangle$. Scrivere la matrice, $B := B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ della proiezione ortogonale $p_S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{W}$. Si scriva la matrice $C := C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ della stessa proiezione in base canonica.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo.