

INGEGNERIA EDILE ARCHITETTURA
ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
9 LUGLIO 2012

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca la matrice

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Si dica per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile.
- (2) Dopo aver verificato che per $\alpha = 1$ la matrice A_1 risulta diagonalizzabile, se ne determini una base di autovettori.
- (3) Si determini una matrice diagonale D ed una matrice invertibile H tali che $H^{-1}A_1H = D$.

Svolgimento. (1) Calcolo il polinomio caratteristico di A_α , sviluppando lungo la prima riga:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha-t & 1 \\ 1 & -\alpha & -t \end{pmatrix} &= (1-t) \det \begin{pmatrix} 1+\alpha-t & 1 \\ -\alpha & -t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\alpha-t & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(-t - \alpha t + t^2 + \alpha) + 1 - 1 - \alpha + t \\ &= (1-t)(t^2 - (\alpha+1)t + \alpha) + (t - \alpha) \\ &= (1-t)(t - \alpha)(t - 1) + (t - \alpha) \\ &= (t - \alpha)(-t^2 + 2t - 1 + 1) \\ &= -t(t - \alpha)(t - 2). \end{aligned}$$

Quindi le radici del polinomio caratteristico sono 0, α e 2. Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, le tre radici sono distinte e la matrice A_α risulta diagonalizzabile. Studiamo separatamente i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$.

Per $\alpha = 0$ ho

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $-t^2(t - 2)$. Quindi A_0 è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è 2, ovvero se e solo se il rango della matrice A_0 è 1 (ricordo che il nucleo dell'applicazione lineare associata ad A_0 coincide con l'autospazio relativo all'autovalore 0, e la sua dimensione è uguale al numero di colonne della matrice A_0 meno il suo rango per il Teorema di Rouché-Capelli). Il rango di A_0 è 2, come si deduce immediatamente dal fatto che le prime due colonne di A_0 sono due vettori linearmente indipendenti (ed il rango non può essere 3 perchè 0 è un autovalore di A_0). Quindi A_0 non è diagonalizzabile.

Per $\alpha = 2$ ottengo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $-t(t-2)^2$. Quindi A_2 è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 è 2, ovvero se e solo se il rango della matrice $A_2 - 2I_3$ è 1, dove I_3 è la matrice con 3 righe e 3 colonne che ha 1 sulla diagonale e zero altrove (ricordo che il nucleo dell'applicazione lineare associata ad $A_2 - 2I_3$ coincide con l'autospazio relativo all'autovalore 2, e la sua dimensione è uguale al numero di colonne della matrice $A_2 - 2I_3$ meno il suo rango per il Teorema di Rouché-Capelli). La matrice $A_2 - 2I_3$ è

$$A_2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 2, visto che le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Quindi A_2 non è diagonalizzabile.

In conclusione, A_α è diagonalizzabile se e solo se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 2$.

(2) La matrice A_1 è

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed essa risulta diagonalizzabile dalla discussione precedente. Il polinomio caratteristico di A_1 è $-t(t-1)(t-2)$, dunque devo determinare gli autospazi unidimensionali V_0 , V_1 e V_2 relativi agli autovalori 0, 1, 2 rispettivamente.

Per V_0 , devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

da cui risulta $V_0 = \langle (1, 1, -2) \rangle$.

Per V_1 , devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = x \\ 2y + z = y \\ x - y = z \end{cases}$$

da cui risulta $V_1 = \langle (0, 1, -1) \rangle$.

Per V_2 , devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2x \\ 2y + z = 2y \\ x - y = 2z \end{cases}$$

da cui risulta $V_2 = \langle (1, 1, 0) \rangle$.

Una base di autovettori è quindi $\{(1, 1, -2), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$.

(3) Le matrici

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificano $H^{-1}A_1H = D$ come richiesto. $\square$

Esercizio 2. Sia U is sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (3, 0, 4, 0)$ e $v_2 = (2, 1, 1, -1)$.

(1) Si trovi una base ortonormale di U .

(2) Si calcoli la proiezione ortogonale $p_U^\perp(v)$ su U del vettore $v = (2, 3, 1, -1)$.

Svolgimento. (1) Normalizzo la base $\{v_1, v_2\}$ di U che mi viene data tramite Gram-Schmidt. Comincio normalizzando il primo vettore di base:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(3, 0, 4, 0)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = (3/5, 0, 4/5, 0).$$

Procedo calcolando la differenza tra v_2 e la proiezione ortogonale di v_2 sul sottospazio generato da v_1 :

$$\begin{aligned} u'_2 &= v_2 - (v_2 \bullet u_1)u_1 \\ &= (2, 1, 1, -1) - ((2, 1, 1, -1) \bullet (3/5, 0, 4/5, 0))(3/5, 0, 4/5, 0) \\ &= (2, 1, 1, -1) - 2(3/5, 0, 4/5, 0) \\ &= (4/5, 1, -3/5, -1) \end{aligned}$$

e quindi normalizzo tale differenza ottenendo:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \frac{(4/5, 1, -3/5, -1)}{\sqrt{16 + 25 + 9 + 25/5}} \\ &= \frac{(4/5, 1, -3/5, -1)}{\sqrt{3}} \\ &= (4\sqrt{3}/15, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/5, -\sqrt{3}/3). \end{aligned}$$

Quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base ortonormale di U .

(2) Procedo con il calcolo diretto:

$$\begin{aligned} p_U^\perp(v) &= (v \bullet u_1)u_1 + (v \bullet u_2)u_2 \\ &= ((2, 3, 1, -1) \bullet (3/5, 0, 4/5, 0))(3/5, 0, 4/5, 0) + \\ &\quad + \left((2, 3, 1, -1) \bullet \left(\frac{4\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \right) \right) \left(\frac{4\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= 2(3/5, 0, 4/5, 0) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \left(\frac{4\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}, 0 \right) + \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -1, -\frac{5}{3} \right) \\ &= \left(\frac{38}{15}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ l'endomorfismo definito dalle condizioni

$$L(X^2) = 2X^2 - X - 1; \quad L(X) = -X^2 + X + 1; \quad L(1) = X + 1.$$

- (1) Si scriva la matrice A di L rispetto alla base $\{1, X, X^2\}$ di $\mathbb{R}[X]^{\leq 2}$.
- (2) Si determini la dimensione del nucleo di L ed una sua base.
- (3) Si determini la dimensione dell'immagine di L ed una sua base.
- (4) Si calcoli la contro immagine del vettore $3X^2 + X + 1$.

Svolgimento. (1) La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(sulle colonne abbiano le coordinate dei vettori di base).

(2) Le coordinate del nucleo di L soddisfano il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è il sottospazio $\langle (-1, 2, 1) \rangle$ (che, grazie al teorema di Rouché-Capelli, deve avere dimensione 1, visto che il rango della matrice A è 2, come si deduce immediatamente dal fatto che le prime due righe sono indipendenti mentre la terza e la seconda riga coincidono). Quindi $\ker(L)$ ha dimensione 1 e

$$\ker(L) = \langle X^2 + 2X - 1 \rangle.$$

(3) Sappiamo che $\dim(\ker(L)) = 1$ e $\dim(\mathbb{R}[X]^{\leq 2}) = 3$. Quindi la formula delle dimensioni implica che l'immagine di L ha dimensione $3 - 1 = 2$. Visto che i vettori $2X^2 - X - 1$ e $X + 1$ sono linearmente indipendenti e appartengono all'immagine di L , essi ne costituiscono una base:

$$\operatorname{im}(L) = \langle 2X^2 - X - 1, X + 1 \rangle.$$

(4) La struttura della preimmagine è della forma $v_0 + \ker(L)$, dove v_0 è un qualunque vettore tale che $L(v_0) = 3X^2 + X + 1$. Visto che già conosciamo $\ker(L)$, basta trovare v_0 . Le coordinate di $3X^2 + X + 1$ nella base data sono $(1, 1, 3)$. Per determinare v_0 , basta quindi trovare una soluzione particolare del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che è, ad esempio, $(3, -1, 1)$, corrispondente al vettore $X^2 - X + 3$. Dunque,

$$L^{-1}(3X^2 + X + 1) = X^2 - X + 3 + \langle X^2 - 2X - 1 \rangle.$$

□

Esercizio 4. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i piani π e π' definiti nel modo seguente:

$$\pi : 2x + z = 1$$

$$\pi' : (0, 1, 0) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, -2) \rangle.$$

Sia $r := \pi \cap \pi'$ la retta ottenuta intersecando π e π' e sia s la retta passante per $(3/2, 0, 0)$ e parallela al vettore $(1, 1, 0)$.

- (1) Si determinino l'equazione parametrica di π e r e l'equazione cartesiana di π' e s .
- (2) Si verifichi che r ed s sono sghembe e si calcolino i punti e la retta di minima distanza tra r ed s .
- (3) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si definiscano i piani

$$\pi_a : a(a-1)x + (a-1)(a-2)y + z = a+2.$$

Si descriva completamente, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $\pi \cap \pi' \cap \pi_a$ ottenuto intersecando i tre piani π , π' e π_a tra loro.

Svolgimento. (1) Equazione parametrica di π . Un punto di π è $(0, 0, 1)$ ed il suo sottospazio direttore, ottenuto risolvendo il sistema omogeneo $2x + z = 0$, è $\langle (1, 0, -2), (0, 1, 0) \rangle$. Quindi

$$\pi : (0, 0, 1) + \langle (1, 0, -2), (0, 1, 0) \rangle.$$

Equazione cartesiana di π' . Il piano π' è della forma $ax + by + cz + d = 0$ con $\langle (a, b, c) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, -2) \rangle^\perp$. Perciò (a, b, c) si può determinare risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (a, b, c) \bullet (1, 0, 0) &= 0 \\ (a, b, c) \bullet (0, 1, -2) &= 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo, ad esempio, $(a, b, c) = (0, 2, 1)$. Quindi π' è del tipo $2y + z + d = 0$. Sostituendo le coordinate del punto $(0, 1, 0)$ ottengo $d = -2$, e quindi

$$\pi' : 2y + z - 2 = 0.$$

Equazione parametrica di r . L'equazione cartesiana di r è

$$\begin{cases} 2y + z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

Il sottospazio direttore di r si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato, ovvero

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\langle (1, 1, -2) \rangle$. Un punto di r è $(1/2, 1, 0)$. Quindi

$$r : (1/2, 1, 0) + \langle (1, 1, -2) \rangle.$$

Equazioni cartesiane di s . Il sottospazio ortogonale a $\langle (1, 1, 0) \rangle$ ha dimensione 2. Un semplice calcolo mostra che tale sottospazio è $\langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Dunque, s ha equazione

$$s : \begin{cases} x - y &= d \\ z &= d' \end{cases}$$

per qualche d, d' . Sostituendo le coordinate del punto $(3/2, 0, 0)$ ottengo d e d' , da cui l'equazione cartesiana di s :

$$\begin{cases} x - y &= 3/2 \\ z &= 0 \end{cases}$$

(2) La direzione di r è $\langle(1, 1, -2)\rangle$ mentre quella di s è $\langle(1, 1, 0)\rangle$, dunque r ed s non sono parallele. La loro intersezione può essere studiata tramite il sistema

$$\begin{cases} 2y + z = 2 \\ 2x + z = 1 \\ x - y = 3/2 \\ z = 0 \end{cases}$$

che non ha nessuna soluzione. Per dimostrarlo, possiamo risolverlo tramite sostituzione o tramite eliminazione di Gauss. Alternativamente, possiamo notare che la matrice incompleta del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre quella completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice incompleta ha rango 3: ad esempio, si può notare che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

La matrice completa ha rango 4: infatti si ha

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 4 + 4 = 8 \neq 0. \end{aligned}$$

Questo basta a concludere che r ed s sono sghembe.

Un punto generico di r è

$$P_t = (1/2 + t, 1 + t, -2t)$$

ed un punto generico di s è

$$Q_s = (3/2 + s, s, 0).$$

Il vettore $Q_s - P_t$ è

$$Q_s - P_t = (1 + s - t, -1 + s - t, 2t).$$

Impongo la condizione di perpendicolarità di $Q_s - P_t$ con i sottospazi direttori di r ed s , ottenendo il sistema

$$\begin{cases} (1 + s - t, -1 + s - t, 2t) \bullet (1, 1, -2) = 0 \\ (1 + s - t, -1 + s - t, 2t) \bullet (1, 1, 0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 + s - t - 1 + s - t - 4t = 0 \\ 1 + s - t - 1 + s - t = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $t = 0$, $s = 0$. I punti di minima distanza sono quindi $(1/2, 1, 0)$ e $(3/2, 0, 0)$. La retta di minima distanza è quindi

$$t : (3/2, 0, 0) + \langle (1, -1, 0) \rangle$$

che, in equazioni cartesiane, diventa

$$\begin{cases} x + y = 3/2 \\ z = 0. \end{cases}$$

(3) L'intersezione dei tre piani è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ a(a-1)x + (a-1)(a-2)y + z = a+2. \end{cases}$$

La matrice incompleta associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a(a-1) & (a-1)(a-2) & 1 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ a(a-1) & (a-1)(a-2) & 1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice incompleta è

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a(a-1) & (a-1)(a-2) & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ (a-1)(a-2) & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a(a-1) & (a-1)(a-2) \end{pmatrix} = \\ &= 2(2 - a^2 + 3a - 2) - 2a(a-1) = -2a^2 + 6a - 2a^2 + 2a = -4a(a-2). \end{aligned}$$

Se $a \neq 0$ e $a \neq 2$, allora il determinante della matrice incompleta è 3, quindi il rango della matrice incompleta è 3 ed il sistema ha una sola soluzione. Tale soluzione si può determinare esplicitamente risolvendo esplicitamente il sistema, ad esempio tramite il metodo di eliminazione di Gauss. Il punto di intersezione diventa

$$\pi \cap \pi' \cap \pi_a = \left(\frac{-a+5}{4(a-2)}, \frac{a+1}{4(a-2)}, \frac{3a-9}{2(a-2)} \right).$$

Se $a = 2$, le matrici completa ed incompleta diventano rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice incompleta ha rango 2 (le prime due colonne sono indipendenti) mentre la completa ha rango 3 (la prima, terza e quarta colonna sono indipendenti, come risulta dal fatto che il sistema $x(2, 0, 2) + y(0, 2, 0) + z(1, 2, 4) = (0, 0, 0)$, ovvero

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = -2x \\ y = -2z = 4x \\ 2z = -x \end{cases}$$

ha solo la soluzione $x = y = z = 0$. Perciò il sistema non ha soluzione, quindi i tre piani non si intersecano. Visto che $\pi \cap \pi'$ è la retta r , questo equivale a dire che la retta r è parallela al piano π_2 , e non è contenuta in esso.

Se $a = 0$, le matrici completa ed incompleta diventano rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice incompleta ha rango 2 (le prime due colonne sono indipendenti). Anche la matrice completa ha rango 2 (le ultime due righe coincidono). Perciò il sistema è risolubile, e, grazie al teorema di Rouché-Capilli, la soluzione è una varietà lineare di dimensione $3 - 2 = 1$. Dunque, i tre piani si intersecano in una retta. Poichè già sappiamo che π e π' si intersecano nella retta r , segue che l'intersezione dei tre piani è la retta r , che quindi risulta contenuta in π_0 . $\square$