INGEGNERIA EDILE ARCHITETTURA
ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
19 GIUGNO 2012

MATTEO LONGO

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle seguenti condizioni:

$$L_a(1,1,1) := (a+1, a+1, a); \quad L_a(1,0,1) = (1, a, a+1), \quad L_a(1,0,0) = (1, a, 1).$$

(1) Si scriva la matrice A_a che rappresenta L_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Si discuta al variare del parametro a la diagonalizzabilità della matrice A_a.
(3) Dopo aver verificato che per $a = 1$ la matrice A_1 è diagonalizzabile, si determini una base di autovettori per A_1.
(4) Si determini una matrice diagonale D ed una matrice invertibile H tale che $D = HA_1H^{-1}$.

Svolgimento. (1) Devo trovare $L_a(0,1,0)$ e $L_a(0,0,1)$, visto che già ho $L_a(1,0,0)$. Noto che $(0,0,1) = (1,0,1) - (1,0,0)$. Quindi, visto che L_a è lineare, concludo che

$$L_a(0,0,1) = L_a(1,0,1) - L_a(1,0,0) = (1, a, a+1) - (1, a, 1) = (0, 0, a).$$

Noto poi che $(0,1,0) = (1,1,1) - (1,0,1)$, dunque come sopra

$$L_a(0,1,0) = L_a(1,1,1) - L_a(1,0,1) = (a+1, a+1, a) - (1, a, a+1) = (a, 1, -1).$$

Quindi, mettendo come colonne le immagini dei vettori della base canonica (le cui coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ coincidono con i vettori stessi) ottengo la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

(2) Calcolo il polinomio caratteristico di A_a, ovvero il determinante di $A_a - tI_3$ sviluppando lungo la terza colonna ed ottengo:

$$\begin{aligned}
\det(A_a - tI - 3) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1-t & a & 0 \\ a & 1-t & 0 \\ 1 & -1 & a-t \end{pmatrix} \\
&= (a-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & a \\ a & 1-t \end{pmatrix} \\
&= (a-t)((1-t)^2 - a^2) \\
&= (a-t)(1-t-a)(1-t+a).
\end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono dunque $a, 1-a, 1+a$ (ottenute risolvendo le equazioni di primo grado $a-t=0$, $1-t-a=0$ e $1-t+a=0$ che si ottengono uguagliando a zero i fattori del polinomio caratteristico). Studio ora sotto quali condizioni queste tre radici sono distinte. Uguagliando le radici a coppie ottengo: l'equazione $a=1-a \Leftrightarrow a=1/2$; l'equazione $a=1+a$ che non ha nessuna soluzione; l'equazione $1-a=1+a \Leftrightarrow a=0$. Posso dunque concludere che se $a \neq 0$ e $a \neq 1/2$ allora A_a è diagonalizzabile (3 radici reali e distinte). Studio a parte i casi rimanenti.

Se $a=0$ il polinomio caratteristico di A_0 è $-t(1-t)^2$, dunque A_0 è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Studio per questo il rango di

$$A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noto immediatamente che il rango di $A_0 - I_3$ à 1 (le colonne sono linearmente dipendenti) quindi l'autospazio corrispondente ha dimensione $3-1=2$ (Rouché-Capelli), e A_0 risulta diagonalizzabile.

Se $a=1/2$ il polinomio caratteristico di A_0 è $-(t-3/2)(t-1/2)^2$, dunque $A_{1/2}$ è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo all'autovalore $1/2$ ha dimensione 2. Studio per questo il rango di

$$A_{1/2} - (1/2)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Noto immediatamente che il rango di questa matrice è 2 (la prima e la seconda colonna sono indipendenti, e sappiamo che questa matrice non può avere rango 3 visto che $1/2$ è autovalore di $A_{1/2}$). Quindi l'autospazio corrispondente ha dimensione $3-2=1$ (Rouché-Capelli), e $A_{1/2}$ non è diagonalizzabile.

(3) Per $a=1$ ottengo la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $-t(t-1)(t-2)$, che ha 3 radici reali distinte: $0,1,2$. Dunque A_1 è diagonalizzabile (come risultava dalla discussione precedente). Calcolo gli autospazi V_0, V_1, V_2 corrispondenti, rispettivamente, agli autovalori $0,1,2$. Per V_0 devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y & = 0 \\ x+y & = 0 \\ x-y+z & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y & = -x \\ z & = y-x = -2x \end{cases}$$

da cui risulta $V_0 = \langle (1,-1,-2) \rangle$. Per V_1 devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y & = x \\ x+y & = y \\ x-y+z & = z \end{cases} \Longrightarrow x=y=0$$

da cui risulta $V_1 = \langle(0,0,1)\rangle$. Per V_2 devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y & = 2x\\ x+y & = 2y\\ x-y+z & = 2z\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y & = x\\ z & = 0\end{cases}$$

da cui risulta $V_2 = \langle(1,1,0)\rangle$. Una base di autovettori, di autovalori ordinatamente $0, 1, 2$, è dunque

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

(4) Ordinando autovalori ed autovettori corrispondenti, risulta

$$D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2. Siano $r := (1,1,-1) + \langle(1,1,0)\rangle$ ed

$$s : \begin{cases} x+y & = 0\\ x+z & = 2\end{cases}$$

due rette di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(1) Si determini la posizione reciproca di r ed s verificando che sono sghembe.
(2) Si determinino i punti di minima distanza e l'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
(3) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si considerino i piani

$$\pi_a : x + ay - z - a = 0.$$

Si descriva al variare di a l'intersezione di π_a con la retta r.

Svolgimento. (1) Le equazioni cartesiane di r sono:

$$r : \begin{cases} x-y & = 0\\ z & = -1\end{cases}$$

che si possono ottenere determinando, ad esempio, l'ortogonale dello spazio direttore $\langle(1,1,0)\rangle$ di r, che risulta essere $\langle(1,-1,0),(0,0,1)\rangle$, da cui risulta che due dei piani che si intersecano in r sono del tipo $x - y + d = 0$ e $z = d'$; sostituendo le coordinate del punto $(1,1,-1)$ ottengo le equazioni cartesiane di r. Per determinare le equazioni parametriche di s, noto che $(0,0,2)$ è un punto di s e che la soluzione del sistema omogeneo associato al sistema che descrive s è $\langle(1,-1,-1)\rangle$. Dunque i sottospazi direttori di r ed s sono distinti e le due rette non sono parallele. Inoltre, il sistema che si ottiene intersecando r ed s è

$$\begin{cases} x-y & = 0\\ z & = -1\\ x+y & = 0\\ x+z & = 2\end{cases}$$

che non ha soluzioni, come si verifica direttamente oppure notando che la matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (da cui si deduce anche che le due rette sono sghembe) mentre ma matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 4 (ovvero il determinante è non nullo). Rouché-Capelli dice allora che il sistema non ha soluzioni.

(2) Un punto generico di r è $P_t = (1+t, 1+t, -1)$ mentre un punto generico di s è del tipo $Q_s = (s, -s, 2-s)$ al variare dei parametri $t, s \in \mathbb{R}$. Il generico vettore $P_t - Q_s$ è allora $(1+t-s, 1+t+s, -3+s)$. I punti di minima distanza P, Q verificano la proprietà che $P-Q$ è ortogonale ai sottospazi direttori di r e s. Perciò per determinare tali punti basta imporre

$$\begin{cases} (1+t-s, 1+t+s, -3+s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = 0 \\ (1+t-s, 1+t+s, -3+s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1+t & = 0 \\ -2s+3-s & = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce $t = -1$, $s = 1$. Segue, sostituendo questi valori per t ed s nelle espressioni dei generici P_t e Q_s, che i punti di minima distanza sono $P = (0,0,-1) \in r$ e $Q = (1,-1,1) \in s$. La retta di minima distanza è quindi

$$t : (0,0,-1) + \langle (1,-1,2) \rangle$$

(notare che $(1,-1,2) = Q-P$). Posso procedere a trovarne le equazioni cartesiane. Alternativamente, noto che la retta di minima distanza si ottiene come intersezione dei piani π_1 e π_2 che contiengono r ed s, rispettivamente, ed sono paralleli alla direzione ortogonale ai sottospazi direttori di r ed s. Un generatore del sottospazio ortogonale allo spazio $\langle (1,1,0), (1,-1,-1) \rangle$ generato dalle direzioni di r ed s è $(1,-1,2)$ (che infatti coincide con il sottospazio generato da $P-Q$, vettore che congiunge i punti di minima distanza). Perciò

$$\pi_1 : (1,1,-1) + \langle (1,1,0), (1,-1,2) \rangle$$

$$\pi_2 : (0,0,2) + \langle (1,-1,-1), (1,-1,2) \rangle.$$

Ne ricavo le equazioni cartesiane

$$\pi_1 : x - y - z = -1$$

$$\pi_2 : x + y = 0$$

(per π_1, ad esempio, noto che l'ortogonale di$\langle(1,1,0),(1,-1,2)\rangle$ è $\langle(1,-1,-1)\rangle$, quindi π_1 è della forma $x-y-2z+d=0$, e sostituendo le coordinate di $(1,1,-1)$ ottengo il valore di d; stesso procedimento per determinare π_2). Segue

$$t: \begin{cases} x-y-z &= -1 \\ x+y &= 0. \end{cases}$$

(3) Intersecando r e π ottengo il sistema

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ z &= -1 \\ x+ay-z &= a. \end{cases}$$

Le matrici completa ed incompleta del sistema sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice incompleta (sviluppato ad esempio lungo la seconda riga) è $-a-1$. Perciò se $a \neq -1$ il rango della matrice incompleta è 3, da cui segue che $\pi \cap r$ consiste in un punto (sistema risolubile e soluzioni del sistema omogeneo associato di dimensione $3-3=0$). Se invece $a=-1$ il rango della matrice incomplete è 2 (le ultime due colonne sono linearmente indipendenti) mentre il rango della matrice completa è 3, visto che il minore ottenuto dalla prima, terza e quarta colonna da determinante non nullo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Perciò in questo caso $\pi \cap r = \emptyset$ (sistema non risolubile) e la retta ed il piano risultano paralleli, con r non contenuta in π. □

Esercizio 3. Si definisca il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U := \langle(1,1,0,1),(2,1,0,0),(3,2,0,1)\rangle.$$

(1) Si determini la dimensione di U e una sua base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).
(2) Si determini $U^\perp$, l'ortogonale di U in $\mathbb{R}^4$ (sempre rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).
(3) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $(2,3,1,-2)$ su U.
(4) Si dica, giustificando la risposta, se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la proiezione ortogonale $p_U^\perp : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ su U sia rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. (1) Il terzo vettore è somma dei primi due, quindi U ha dimensione 2, generato da $v_1 = (1,1,0,1)$ e $v_2 = (2,1,0,0)$. Determino una base ortonormale.

Comincio normalizzando v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1,1,0,1)}{\sqrt{1+1+1}} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}).$$

Per l'altro vettore, determino per prima cosa la differenza, denotata u_2', tra v_2 e la proiezione di v_2 sul sottospazio generato da u_1:

$$\begin{aligned} u_2' &= (2,1,0,0) - \left((2,1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}) \\ &= (2,1,0,0) - \frac{3}{\sqrt{3}} (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}) \\ &= (2,1,0,0) - (1,1,0,1) = (1,0,0,-1) \end{aligned}$$

e poi normalizzo u_2' trovando

$$u_2 = \frac{u_2'}{||u_2'||} = \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{1+1}} = (1/\sqrt{2}, 0, 0, -1/\sqrt{2}).$$

Dunque, una base ortonormale di U è

$$\left\{ (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, 0, 0, -1/\sqrt{2}) \right\}.$$

(2) Poiché U ha dimensione 2, il suo ortogonale ha dimensione $4 - 2 = 2$. Per determinarlo, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} (1,1,0,1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} & = 0 \\ (2,1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + w & = 0 \\ 2x + y & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y & = -2x \\ w & = -x - y = x \end{cases}$$

da cui (notando che su z non c'è alcuna condizione)

$$U^\perp = \langle (1,-2,0,1), (0,0,1,0) \rangle.$$

(3) Utilizzo la formula della proiezione ortogonale:

$$\begin{aligned}
p_U^{\perp}(2,3,1,-2) = &\left((2,3,1,-2)\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right)(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0,1/\sqrt{3})+\\
&+\left((2,3,1,-2)\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)(1/\sqrt{2},0,0,-1/\sqrt{2})\\
=&\frac{3}{\sqrt{3}}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0,1/\sqrt{3})+\frac{4}{\sqrt{2}}(1/\sqrt{2},0,0,-1/\sqrt{2})\\
=&(1,1,0,1)+(2,0,0,-2)\\
=&(3,1,0,-1).
\end{aligned}$$

Alternativamente, avrei potuto esprimere $(2,3,1,-2)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0,1)$, $(2,1,0,0)$, $(1,-2,0,1)$, $(0,0,1,0)$ (i primi due generano U ed i secondi due generano $U^{\perp}$), ottenendo

$$(2,3,1,-2) = -(1,1,0,1) + 2(2,1,0,0) - (1,-2,0,1) + (0,0,1,0).$$

Per definizione, la proiezione ortogonale su U si ottiene come

$$p_U^{\perp}(2,3,1,-2) = -(1,1,0,1) + 2(2,1,0,0) = (3,1,0,-1).$$

(4) Basta prendere la base

$$\{(1,1,0,1),(1,-2,0,1),(2,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

e notare che il primo ed il terzo vettore, appartendendo a U, sono autovettori di autovalore 1 per la $p_U^{\perp}$, mentre il terzo e quarto vettore, appartenendo a $U^{\perp}$, sono autovettori di autovalore 0 per $p_U^{\perp}$. In altre parole, ricordando che, per definizione di proiezione ortogonale, si ha $p_U^{\perp}(v) = u$ se $v = u + u'$ con $u \in U$ e $u' \in U^{\perp}$, si vede che $p_U^{\perp}(u) = u$ per ogni $u \in U$ e $p_U^{\perp}(u') = 0$ per ogni $u' \in U^{\perp}$. La matrice di $p_U^{\perp}$ rispetto ad una qualunque base di $\mathbb{R}^4$ in cui il primo e terzo vettore stiano in U ed il secondo e quarto stiano in $U^{\perp}$ ha dunque la forma voluta (ricordare come si costruisce la matrice associata ad un'applicazione lineare rispetta ad una fissata basa; vedere anche l'esercizio successivo). □

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f(aX^2 + bX + c) = (a - b, a + c).$$

(1) Si scriva la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi $\{X^2, X, 1\}$ di $\mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ ed alla base canonica $\{(1,0),(0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(2) Si calcoli $\ker(f)$ determinandone una base e la dimensione.

Svolgimento. (1) Ricordo che, data $L : V \to W$, lineare, con $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base di W, la i-esima colonna della matrice associata a L

rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m,i} \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti $a_{i,j}$ sono determinati dalla condizione

$$L(v_i) = a_{1,i}w_1 + a_{2,i}w_2 + \cdots + a_{m,i}w_m.$$

Nel nostro caso

$$f(X^2) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$
$$f(X) = (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1)$$
$$f(1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$$

dunque la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Per determinare il $\ker(f)$, basta imporre che $f(aX^2 + bX + c) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} a - b &= 0 \\ a + c &= 0. \end{cases}$$

La soluzione del sistema omogeneo in a, b, c è il sottospazio $\langle(1,1,-1)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$. Dunque,

$$\ker(f) = \langle X^2 + X - 1\rangle.$$

□

Esercizio 5 (Facoltativo)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e $L : V \to V$ un endomorfismo di V. Supponiamo che $L \circ L = 0$ ma $L \neq 0$. Si determini, se possibile, la dimensione del nucleo di L e si dica se L è diagonalizzabile.

Svolgimento. Determino la dimensione del $\ker(L)$. Tale dimensione non può essere 3, altrimenti $\ker(L) = V$ e $L = 0$, escluso dalle nostre ipotesi. Non può essere neppure 0, altrimenti L sarebbe un isomorfismo e $L \circ L$ sarebbe ancora isomorfismo (composizione di due applicazioni lineare iniettive e suriettive è ancora lineare, ineittiva e suriettiva). Visto che $L \circ L = 0$, in particolare $L \circ L$ non è un isomorfismo, quindi $\dim(\ker(f)) \neq 0$. Restano i casi $\dim(\ker(f)) = 1$ oppure $\dim(\ker(f)) = 2$. Se fosse $\dim(\ker(f)) = 1$, allora la dimensione dell'immagine di L sarebbe $3-1 = 2$. In questo caso, indico ad esempio con W l'immagine di f e considero l'applicazione $L : W \to W$ che ottengo restringendo il dominio di L a W (il codomonio sarà sempre W, visto che W è l'immagine di $L : V \to V$, quindi, restringendo L ad un sottospazio di V, i valori che L assume appartengono sempre a W). Quindi, $L \circ L$ può essere descritta graficamente nel modo seguente:

$$V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{L} W$$

Se $\ker(f) \subseteq W$, l'immagine di $L : W \to W$ (la seconda freccia nel diagramma sopra) ha dimensione $2 - 1 = 1$, mentre se $\ker(f) \cap W = \{0\}$ allora l'immagine di $L : W \to W$ ha dimensione 2. Quindi, l'immagine di $L \circ L$ ha dimensione 1 o 2, dunque, in ogni caso, almeno 1. In particolare, la dimensione dell'immagine di

$L \circ L$ non può mai essere 0 se $\dim(\ker(f)) = 1$. Dunque, il nucleo di f deve avere dimensione 2.

Detta $\{v_1, v_2\}$ una base del nucleo, completo ad una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di V. Noto che $L(v_3)$ deve essere contenuta in $\langle v_1, v_2\rangle$, altrimenti $L \circ L$ non sarebbe 0. Per fissare le idee, diciamo che, ad esempio, $L(v_2) = av_1 + bv_2$. Quindi, visto che $L(v_1) = L(v_2) = 0$, la matrice che rappresenta L nella base scelta è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $-t^3$. L'unico autovalore è quindi 0, di molteplicità algebrica 3 e geometrica 2 (visto che $\dim(\ker(f)) = 2$), quindi f non è diagonalizzabile. $\square$