

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

(LONGO)

II Appello – 19 Giugno 2013 – compito A

DOMANDE

1. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due sottospazi di V tali che $V = U \oplus W$ (ovvero, $U + W = V$ e $U \cap W = 0$). Si mostri che ogni vettore $v \in V$ può essere scritto in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$.
2. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V . Dimostrare che se v e w sono due autovettori di V relativi a due autovalori distinti, allora v e w sono linearmente indipendenti.
3. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ lo spazio affine standard sul campo dei numeri reali, dotato del prodotto scalare standard. Siano $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ due varietà lineari di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, e si indichi con $\delta = d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) > 0$ la loro distanza. Mostrare che se $P \in \mathbb{L}$ e $Q \in \mathbb{M}$ sono due punti la cui distanza $d(P, Q)$ è pari a δ , allora il vettore $Q - P$ è ortogonale sia allo spazio direttore di $\mathbb{L}$ che allo spazio direttore di $\mathbb{M}$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Al variare del parametro reale k , si consideri l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti condizioni:

$$f_k(1, 0, 0) = (1 - k, 1, 0), \quad f_k(1, 1, 0) = (1, k, 0), \quad f(0, -1, 1) = (k^2 - k - 1, 0, 1).$$

- (a) Si mostri che $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- (b) Si determini la matrice P del cambio di base dalla base canonica $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$.
- (c) Si scriva la matrice A_k di f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.
- (d) Determinare i valori del parametro k per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile. Per tali valori, si determini una base ortonormale di autovettori di A_k .
- (e) Determinare tutti i valori del parametro k per i quali A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si considerino le rette r_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ e la retta t di equazioni cartesiane

$$r_a : \begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 = a \\ ax_2 - x_3 = a + 1 \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare la posizione reciproca delle rette r_a e t al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
- (b) Per $a = 0$, si verifichi, se non lo si è già fatto al punto precedente, che r_0 e t sono sghembe. Calcolare i punti di minima distanza $R \in r_0$ e $T \in t$ fra la retta r_0 e la retta t , e la loro distanza.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_t := \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

- (a) Si determini la dimensione ed una base di W .
- (b) Si studi al variare di $t \in \mathbb{R}$ la dimensione di U_t , determinando per ciascun t una sua base.
- (c) Si determinino tutti i valori di t per i quali U_t e W non sono in somma diretta. Per tali valori, si determini una base di $U_t \cap W$ e la si completi ad una base di $U_t + W$.

Esercizio 4.

- (a) Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^5 = 3$.
- (b) Sia $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di $\mathbb{R}^3$. Sapendo che f non è un isomorfismo, e che $2 - i$ è una soluzione dell'equazione $P(X) = 0$, si determini $P(X)$ e si dica se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Svolgimento

Esercizio 1 Per il punto 1 basta calcolare il determinante della matrice 3 per 3 che si ottiene mettendo i 2 vettori in colonna, e notando che è non nullo (N.B. Non è l'unico metodo, e forse neppure il più veloce). Per il secondo punto si devono esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$: i coefficienti sono le colonne della matrice P . Risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando P , è possibile per linearità ricavare l'immagine dei vettori della base canonica, che costituiscono le colonne della matrice A_k . Ad esempio

$$f(0, 1, 0) = f((1, 1, 0) - (1, 0, 0)) = f(1, 1, 0) - f(1, 0, 0) = (1 - k, 1, 0) - (1, k, 0) = (k, k - 1, 0).$$

Si ottiene la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 - k & k & k^2 - 1 \\ 1 & k - 1 & k - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice risulta

$$P_{A_k}(X) = (1 - X)(1 - \sqrt{k^2 - k + 1})(X + \sqrt{k^2 - k + 1}).$$

Notando che $k^2 - k + 1$ è una quantità strettamente positiva per ogni numero reale k , si ottiene che $\sqrt{k^2 - k + 1} \neq -\sqrt{k^2 - k + 1}$ per ogni k , e risolvendo l'equazione $\sqrt{k^2 - k + 1} = 1$ si ottiene $k = 0$, $k = 1$. Quindi per $k \neq 0, 1$ la matrice A_k ha 3 autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile. Se $k = 1$ la matrice è simmetrica, dunque diagonalizzabile. Per $k = 0$ si nota che il rango della matrice $A_0 - 1$ è 2, quindi A_0 non è diagonalizzabile. Per $k = 1$, una base ortonormale di autovettori è

$$\{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), (0, 0, 1), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)\}$$

dove i primi due autovettori generano l'autospazio relativo all'autovalore 1, mentre il terzo è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore -1 .

Esercizio 2 Intersecando le due rette si ottiene il sistema con matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & a & -1 & a + 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica (tramite Gauss o calcolando il rango tramite i determinanti) che il rango della matrice incompleta è sempre 3, mentre il determinante della matrice completa (ottenuto di nuovo tramite un calcolo diretto oppure tramite Gauss ed il prodotto degli elementi nella diagonale) si annulla solo per $a = -1$. Segue che le due rette sono sghembe se $a \neq -1$ e sono incidenti per $a = -1$. Per il secondo punto, si prende un punto qualunque $P = (x, x, -1)$ ed un punto qualunque $Q = (1 + y, -1 - y, 1 + y)$ e si impone che il vettore $P - Q$ sia ortogonale sia allo spazio direttore di r_0 , generato da $(1, 1, 0)$, sia allo spazio direttore di t , generato da $(1, -1, 1)$. Si ottengono i due punti $(0, 0, -1)$ e $(-1/3, 1/3, -1/3)$, da cui ricavo la distanza tra le due rette, come norma del vettore differenza.

Esercizio 3 W ha dimensione 2, generato da $(1, 1, -1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. U_t ha dimensione 2 per $t \neq 0$ e 1 per $t = 0$, generato da $(t, 1, 0, t)$ e $(0, t, t, t)$ nel primo caso e da $(1, 1, 0, 1)$ nel secondo caso. Se $t = 0$, W e U_0 sono in somma diretta. Se $t \neq 0$, considero il vettore generico $x(1, 1, 0, 1) + y(0, t, t, t) = (x, x + ty, ty, x + ty)$ ed impongo che verifichi la due equazioni di W . Ottengo che questo avviene solo per $t = 1/2$, e l'intersezione risulta generata da $(1, 1, -1, 0)$. Noto che $(1/2, 1, 0, 1/2)$ è un vettore di $U_{1/2}$ che non appartiene all'intersezione, e che $(0, 0, 0, 1)$ è un vettore di W che non appartiene all'intersezione. Una base di $U_{1/2} + W$ nella forma richiesta è quindi formata dai tre vettori

$$(1, 1, -1, 0), (1/2, 1, 0, 1/2), (0, 0, 0, 1).$$

Esercizio 4 Le soluzioni sono

$$z = \sqrt[5]{3}(\cos(2k\pi/5) + \sin(2k\pi/5))$$

per $k = 0, \dots, 4$. Per la seconda parte: il fatto che f non sia isomorfismo dice che X divide il polinomio caratteristico. Poichè tale polinomio ha coefficienti reali, e $2 - i$ è una sua radice, anche $2 + i$ lo è. Quindi, visto che il polinomio caratteristico ha grado 3, abbiamo individuato tutte le sue radici e risulta

$$P = X(X - (2 + i))(X - (2 - i)) = X((X - 2)^2 + 1).$$