

INGEGNERIA EDILE ARCHITETTURA
ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
25 FEBBRAIO 2013

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

- (1) Si discuta al variare del parametro a la diagonalizzabilità della matrice A_a .
- (2) Dopo aver verificato che per $a = 1$ la matrice A_1 è diagonalizzabile, si determini una base di autovettori per A_1 .
- (3) Si determini una matrice diagonale D ed una matrice invertibile H tale che $D = HA_1H^{-1}$.

Svolgimento. (1) Calcolo il polinomio caratteristico di A_a , ovvero il determinante di $A_a - tI_3$ sviluppando lungo la terza colonna ed ottengo:

$$\begin{aligned} \det(A_a - tI - 3) &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-t & a & 0 \\ a & 1-t & 0 \\ 1 & -1 & a-t \end{pmatrix} \\ &= (a-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & a \\ a & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (a-t)((1-t)^2 - a^2) \\ &= (a-t)(1-t-a)(1-t+a). \end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono dunque $a, 1-a, 1+a$ (ottenute risolvendo le equazioni di primo grado $a-t=0$, $1-t-a=0$ e $1-t+a=0$ che si ottengono uguagliando a zero i fattori del polinomio caratteristico). Studio ora sotto quali condizioni queste tre radici sono distinte. Uguagliando le radici a coppie ottengo: l'equazione $a = 1-a \Leftrightarrow a = 1/2$; l'equazione $a = 1+a$ che non ha nessuna soluzione; l'equazione $1-a = 1+a \Leftrightarrow a = 0$. Posso dunque concludere che se $a \neq 0$ e $a \neq 1/2$ allora A_a è diagonalizzabile (3 radici reali e distinte). Studio a parte i casi rimanenti.

Se $a = 0$ il polinomio caratteristico di A_0 è $-t(1-t)^2$, dunque A_0 è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Studio per questo il rango di

$$A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1

Noto immediatamente che il rango di $A_0 - I_3$ è 1 (le colonne sono linearmente dipendenti) quindi l'autospazio corrispondente ha dimensione $3 - 1 = 2$ (Rouché-Capelli), e A_0 risulta diagonalizzabile.

Se $a = 1/2$ il polinomio caratteristico di A_0 è $-(t - 3/2)(t - 1/2)^2$, dunque $A_{1/2}$ è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo all'autovalore $1/2$ ha dimensione 2. Studio per questo il rango di

$$A_{1/2} - (1/2)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Noto immediatamente che il rango di questa matrice è 2 (la prima e la seconda colonna sono indipendenti, e sappiamo che questa matrice non può avere rango 3 visto che $1/2$ è autovalore di $A_{1/2}$). Quindi l'autospazio corrispondente ha dimensione $3 - 2 = 1$ (Rouché-Capelli), e $A_{1/2}$ non è diagonalizzabile.

(2) Per $a = 1$ ottengo la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $-t(t-1)(t-2)$, che ha 3 radici reali distinte: 0, 1, 2. Dunque A_1 è diagonalizzabile (come risultava dalla discussione precedente). Calcolo gli autospazi V_0 , V_1 , V_2 corrispondenti, rispettivamente, agli autovalori 0, 1, 2. Per V_0 devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = y - x = -2x \end{cases}$$

da cui risulta $V_0 = \langle (1, -1, -2) \rangle$. Per V_1 devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = x \\ x + y = y \\ x - y + z = z \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

da cui risulta $V_1 = \langle (0, 0, 1) \rangle$. Per V_2 devo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ x + y = 2y \\ x - y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui risulta $V_2 = \langle (1, 1, 0) \rangle$. Una base di autovettori, di autovalori ordinatamente 0, 1, 2, è dunque

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Ordinando autovalori ed autovettori corrispondenti, risulta

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2. Sia π il piano di equazione cartesiana

$$\pi : x + 2y - z = 1$$

e sia r la retta di equazione parametrica:

$$r : (1, 0, 2) + \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

- (1) Trovare l'equazione parametrica di π e l'equazione cartesiana di r .
- (2) Provare che r e π si intersecano in un solo punto P , e determinarne le coordinate.
- (3) Trovare la proiezione ortogonale s di r su π . (Si ricorda che s è la retta passante il P ed il cui spazio direttore è la proiezione ortogonale dello spazio direttore di r sullo spazio direttore di π).
- (4) Si trovino un punto R su r ed un punto S su s in modo tale che il vettore $R - S$ abbia lunghezza $\sqrt{6}$ e sia perpendicolare a π . Quante sono le coppie di punti (R, S) che soddisfano questa richiesta?

Svolgimento. (1) Trovo l'equazione parametrica di π . Per prima cosa noto che il punto $(2, 1, 3)$ appartiene al piano, visto che $2 + 1 \cdot 2 - 3 = 1$. Inoltre, il vettore $(1, 2, -1)$ è ortogonale al sottospazio direttore di π , che quindi si ottiene trovando due vettori linearmente indipendenti che soddisfino l'equazione

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, -1) = x + 2y - z = 0.$$

Possiamo prendere $(2, -1, 0)$ e $(1, 0, 1)$. Quindi

$$\pi : (2, 1, 3) + \langle (2, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

Per le equazioni cartesiane di r , notiamo che due vettori ortogonali al sottospazio direttore di r sono $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$, dunque la retta r è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x - y = a \\ x - z = b \end{cases}$$

per a, b che si possono determinare sostituendo le coordinate del punto $(1, 0, 2)$, ottenendo $a = 1$, $b = -1$. Ottengo dunque

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = -1. \end{cases}$$

- (2) Studio l'intersezione di r e π mettendo a sistema le loro equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y = 1 \\ x - z = -1. \end{cases}$$

Risolvendo, per sostituzione, ottengo: $y = x - 1$, $z = x + 1$, $x + 2x - 2 - x - 1 = 1$, da cui ricavo $P = (2, 1, 3)$.

(3) Devo solo determinare il sottospazio direttore di s , che consiste nel sottospazio generato dalla proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 1)$, generatore del sottospazio direttore di r , sul sottospazio direttore di π , $W = \langle (2, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle$. La proiezione ortogonale di $(1, 1, 1)$ su W si può ottenere dalla formula:

$$((1, 1, 1) \cdot w_1)w_1 + ((1, 1, 1) \cdot w_2)w_2$$

dove $\{w_1, w_2\}$ è una base ortonormale di W . Per determinare una base ortonormale di W , ricorro al procedimento di Gramm-Schmidt. Si ha, a partire dalla base $\{(1, 0, 1), (2, -1, 0)\}$:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 0, 1) / \| (1, 0, 1) \| = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}). \\ w'_2 &= (2, -1, 0) - ((2, -1, 0) \cdot (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ &= (2, -1, 0) - (1, 0, 1) = (1, -1, -1); \\ w_2 &= (1, -1, -1) / \| (1, -1, -1) \| = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Perciò una base ortonormale del sottospazio direttore di π è

$$\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})\}$$

e ottengo la proiezione ortogonale richiesta come

$$\begin{aligned} &((1, 1, 1) \cdot (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) + \\ &+ ((1, 1, 1) \cdot (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}))(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = \\ &(1, 0, 1) + (-1/3, 1/3, 1/3) = (2/3, 1/3, 4/3). \end{aligned}$$

Dunque, un generatore del sottospazio direttore di s è $(2, 1, 4)$, da cui ricavo l'equazione parametrica di s :

$$s : (2, 1, 3) + \langle (2, 1, 4) \rangle.$$

(Alternativamente: Il vettore $(1, 2, -1)$ è ortogonale al sottospazio direttore di π ; la proiezione di $(1, 1, 1)$ sul sottospazio ortogonale al sottospazio direttore di π è

$$\frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 2, -1)}{(1, 2, -1) \cdot (1, 2, -1)} (1, 2, -1) = (1/3, 2/3, -1/3)$$

e quindi la proiezione su π si ottiene come $(1, 1, 1) - (1/3, 2/3, -1/3)$, riottenendo il risultato precedente in un modo più semplice.)

(4) Se S è un punto di s , allora R deve essere l'intersezione tra r e la retta per S parallela a $(1, 2, -1)$ (questo risulta evidente dal fatto che s è ottenuta come proiezione ortogonale di r su π). Un punto S di s è

$$S = (2, 1, 3) + t(2, 1, 4) = (2 + 2t, 1 + t, 3 + 4t)$$

per qualche t . La retta per S perpendicolare a π è allora

$$(2 + 2t, 1 + t, 3 + 4t) + \langle (1, 2, -1) \rangle = (2 + 2t + u, 1 + t + 2u, 3 + 4t - u)$$

al variare del parametro u . Imponendo che questo punto appartenga alla retta r ottengo l'equazione

$$\begin{cases} 2 + 2t + u - 1 - t - 2u = 1 \\ 2 + 2t + u - 3 - 4t + u = -1 \end{cases}$$

da cui ricavo $t = u$. Risulta pertanto che il punto R è

$$R = (2 + 3t, 1 + 3t, 3 + 3t).$$

Perciò il vettore $R - S$ è

$$R - S = (t, 2t, t).$$

La norma di questo vettore è $|t|\sqrt{6}$, quindi affinché la sua norma sia $\sqrt{6}$ deve essere $t = \pm 1$, il che corrisponde alla scelta dei punti

$$\begin{aligned} S &= (4, 2, 7), \quad R = (5, 4, 6) \\ S &= (0, 0, -1), \quad R = (-1, -2, 0). \end{aligned}$$

Le coppie con questa proprietà sono dunque 2. $\square$

Esercizio 3. Siano $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ e $W = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ gli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado al massimo 3 e la massimo 2, rispettivamente. Si consideri la funzione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

definita da

$$f(a + bX + cX^2 + dX^3) = (a + b) + (a + c)X + dX^2.$$

Definiamo infine gli insiemi $\mathcal{B} = \{1 + X, 1 + X^2, X^2, X^3\}$ e $\mathcal{C} = \{1 + X, X, X^2\}$.

- (1) Si calcoli il nucleo $\ker(f)$ e l'immagine $\text{im}(f)$ di f .
- (2) Si mostri che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di V e W , rispettivamente.
- (3) Si determini la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Svolgimento. (1) Ottengo $\ker(f)$ imponendo la condizione

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è dato dal sottospazio vettoriale generato da $(1, -1, -1, 0)$. Dunque

$$\ker(f) = \langle 1 - X - X^2 \rangle.$$

Visto che il nucleo di f ha dimensione 1, e visto che V ha dimensione 4, risulta che dalla formula di Grassmann la dimensione dell'immagine è 3. Essa è generata da 3 vettori linearmente indipendenti che appartengono all'immagine. Noto che

$$f(1) = 1 + X, \quad f(X) = 1, \quad f(X^3) = X^2$$

appartengono all'immagine e sono linearmente indipendenti. Si ha dunque

$$\text{im}(f) = \langle 1 + X, 1, X^2 \rangle = \langle 1, X, X^2 \rangle.$$

(2) Mostro che $\mathcal{B}$ è una base. Per prima cosa, mostriamo che i 4 vettori sono linearmente indipendenti. Se fosse

$$a(1 + X) + b(1 + X^2) + cX^2 + dX^3 = 0$$

allora abbiamo anche

$$a + b + aX + (b + c)X^2 + dX^3 = 0$$

da cui risulta il sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $a = b = c = d = 0$. Risulta dunque che i quattro vettori sono indipendenti. Ora notiamo che V è uno spazio vettoriale di dimensione 4, generato da $1, X, X^2, X^3$. Ho quindi 4 vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione 4, e questo basta per concludere che sono una base. Per $\mathcal{C}$ il procedimento è lo stesso.

(3) Calcoliamo f dei vari vettori della base. Abbiamo:

$$f(1 + X) = 2 + X$$

$$\begin{aligned}f(1 + X^2) &= 1 + 2X \\f(X^2) &= X \\f(X^3) &= X^2.\end{aligned}$$

Esprimo i vettori a sinistra come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}2 + X &= 2 \cdot (1 + X) + (-1) \cdot X + 0 \cdot X^2 \\1 + 2X &= 1(1 + X) + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\X &= 0 \cdot (1 + X) + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\X^2 &= 0 \cdot (1 + X) + 0 \cdot X + 1 \cdot X^2.\end{aligned}$$

La matrice risulta quindi essere

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 4. Sia A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

definita al variare del parametro reale α . Siano poi $B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- (1) Si dica per quali valori di α il sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ ha soluzione.
- (2) Si determinino, con il metodo preferito (sostituzione o riduzione di Gauss), le soluzioni di $A_\alpha X = B_\alpha$ in tutti i casi in cui il sistema ammette soluzione.

Svolgimento. (1) Calcolo per prima cosa il determinante di A_α :

$$\begin{aligned}\det(A_\alpha) &= \det \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= -2(-1) + 2(-\alpha^2 - \alpha^2) = -2(1 - 2\alpha^2).\end{aligned}$$

Dunque, se $2\alpha^2 \neq 1$, ovvero $\alpha \neq \pm 1/\sqrt{2}$, la matrice incompleta del sistema, A_α , ha rango 3. Poichè la matrice completa $A_\alpha \mid B_\alpha$ ha rango 3, allora in questo caso il sistema è risolubile ed ammette 1 soluzione (i parametri indipendenti sono dati da il numero di incognite meno il rango della matrice, completa o incompleta). Restano dunque da discutere i casi in cui $\alpha^2 = 1/2$, per i quali il rango di A_α risulta strettamente minore di 3 (quindi, al massimo 2).

Supponiamo $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 & \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, visto che il determinante di una sua sottomatrice quadrata di ordine 3 è non nullo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 2 & \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

Dunque, il sistema non è risolubile in questo caso.

(2) Supponiamo $\alpha \neq \pm 1/\sqrt{2}$. Applico il metodo di riduzione di Gauss ed ottengo ricorsivamente le soluzioni. $\square$