FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
GENNAIO 2015
DOCENTE: M. LONGO

1. Domande

Domanda 1. Dire quando una funzione $f : X \to Y$ tra dee insiemi X ed Y si dice iniettiva. Se $f : V \to W$ è una funzione lineare tra due spazi vettoriali V e W di dimensione finita, definire il nucleo $\ker(f)$ di f e dimostrare che f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = 0$.

Svolgimento. Una funzione $f : X \to Y$ si dice iniettiva se vale la seguente implicazione: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Il nucleo $\ker(f)$ di un'applicazione lineare $f : V \to W$ è l'insieme dei vettori del dominio la cui immagine nel codominio è il vettore nullo. Dunque

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}.$$

Mostro che se f è iniettiva il suo nucleo è zero. Se $v \in \ker(f)$ allora $f(v) = 0$. Poiché f è lineare, $f(0) = 0$. Poiché f è iniettiva e v e 0 hanno la stessa immagine tramite f, ottengo $v = 0$. Ho quindi mostrato che $\ker(f)$ contiene solo il vettore nullo. Viceversa, se $\ker(f)$ è zero, mostro che f è iniettiva. Se non lo fosse, esisterebbero v e w tali che $f(v) = f(w)$. Essendo f lineare, $f(v - w) = f(v) - f(w) = 0$, quindi $v - w \in \ker(f)$. Ma $\ker(f) = 0$, da cui segue $v - w = 0$ ovvero $v = w$, perciò f è iniettiva (infatti l'implicazione $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ è equivalente all'implicazione $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$). □

Domanda 2. Sia f_a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione 4 sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Supponiamo che il polinomio caratteristico di f sia $X^2(X^2 - aX + 3)$.

(1) Supponiamo che f_a sia diagonalizzabile. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f_a.
(2) Supponiamo che f_a sia diagonalizzabile. Dire a quali intervalli di $\mathbb{R}$ appartiene il parametro a.
(3) Per tutti i valori del parametro a al punto precedente, dare condizioni necessarie e sufficienti per assicurare la diagonalizzabilità di f_a.

Domanda 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5, e consideriamo due sottospazi U e W di V, entrambi di dimensione 2. Fissiamo delle basi $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Supponiamo che $U \cap W = \langle v \rangle$ abbia dimensione 1. Supponiamo infine che $v \notin \{u_1, w_1\}$ (in altre parole, $v \neq u_1$ e $v \neq w_1$). E' vero o falso che $\{v, u_1, w_1\}$ è una base di $U + W$? Fornire una dimostrazione o un controesempio.

2. Esercizi

Esercizio 1 (9 punti)**.** Indicare con $\mathcal{B}$ il seguente insieme di vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, -1, 0), v_2 = (0, -1, 1, 0), v_3 = (0, 2, -1, 0), v_4 = (0, 1, 0, -1)\}.$$

Indicare inoltre con $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ data dai vettori

$$\mathcal{C} = \{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}.$$

(a) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
(b) Scrivere la matrice di cambio di base P dalla base $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ e la matrice di cambio di base P^{-1} dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$.
(c) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo f_α di $\mathbb{R}^4$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f_\alpha(v_1) = v_1; \quad f_\alpha(v_2) = v_1 - \alpha v_2; \quad f_\alpha(v_3) = 0; \quad f_\alpha(v_4) = v_4 - v_3;$$
$$f_\alpha(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 2(\alpha^2 - \alpha + 1)v_1 - \alpha v_2 - v_3 + v_4.$$

(d) Per tutti i valori per i quali esiste f_α, scriverne la matrice rispetto alla base $\mathcal{C}$ e la matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(e) Per tutti i valori per i quali esiste f_α, determinare il nucleo e l'immagine di f_α, specificandone basi e dimensioni.

Svolgimento. Matrici di cambio di base:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Noto che

$$f_\alpha(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 2v_1 - \alpha v_2 - v_3 + v_4$$

perciò f_α esiste se e solo se

$$2(\alpha^2 - \alpha + 1)v_1 - \alpha v_2 - v_3 + v_4 = 2v_1 - \alpha v_2 - v_3 + v_4$$

e dunque deve essere $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. Discutiamo separatamente i due casi:

$\alpha = 0$. La matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 2. Quindi la dimensione del nucleo e dell'immagine è 2.

$\alpha = 1$. La matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 3. Quindi la dimensione dell'immagine è 2 mentre la dimensione del nucleo è 1.

Alle stesse conclusioni si giunge analizzando le matrici rispetto alla base $\mathcal{C}$. Utilizzando la matrice P^{-1}, ottengo:

$$f_\alpha(e_1) = f_\alpha(v_1 + v_2) = 2v_1 - \alpha v_2 = (2,2,-2,0) - (0,-\alpha,\alpha,0) = (2, 2+\alpha, -2-\alpha, 0);$$

$$f_\alpha(e_2) = f_\alpha(v_2+v_3) = v_1 - \alpha v_2 = (1,1,-1,0) - \alpha(0,-1,1,0) = (1, 1+\alpha, -1-\alpha, 0);$$

$$f_\alpha(e_3) = f_\alpha(2v_2 + v_3) = 2v_1 - 2\alpha v_2 = (2,2,-2,0) - \alpha(0,-2,2,0) =$$
$$= (2, 2+2\alpha, -2-2\alpha, 0);$$

$$f_\alpha(e_4) = f_\alpha(v_2 + v_2 - v_4) = v_1 - \alpha v_2 + v_4 - v_3 =$$
$$(1,1,-1,0) - \alpha(0,-1,1,0) + (0,1,0,-1) - (0,2,-1,0) = (1,\alpha,\alpha,-1)$$

e la matrice rispetto alla base canonica diventa quindi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2+\alpha & 1+\alpha & 2(1+\alpha) & \alpha \\ -(2+\alpha) & -(1+\alpha) & -2(1+\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed in conclusione, abbiamo le matrici:

$\alpha = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2 (9 punti)**.** Sia S_α il sistema:

$$S_\alpha : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + \alpha x_3 + (\alpha-1)x_4 = \alpha \\ -x_1 - x_2 + x_3 + (\alpha^2+\alpha-1)x_4 = \alpha \end{cases}$$

al variate del parametro reale α. Sia inoltre W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a S_0. Infine, al variare del parametro reale β, sia V_β il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1,-1,1+\beta,2)$ e $(0,0,1,1)$.

(a) Trovare dimensione e base di W e di $W^\perp$ (ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).
(b) Per quali β si ha $W+V_\beta = W \oplus V_\beta$? Per i valori di β per i quali $W \cap V_\beta \neq \{0\}$, determinare una base di $W \cap V_\beta \neq \{0\}$ e completarla ad una base di $W + V_\beta$.
(c) Discutere la risolubilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
(d) Per tutti i valori del parametro a per i quali il sistema è risolubile, calcolarne la soluzione.

Svolgimento. Risolvo prima gli ultimi punti dell'esercizio. Operazioni elementari mostrano che il sistema dato è equivalente ad uno che ha matrice completa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha(\alpha+1) \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(\alpha^2+\alpha-1) \end{pmatrix}$$

e matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha(\alpha+1) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(\alpha^2+\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2$ (dove α_i sono le soluzioni dell'equazione $X^2 + X - 1 - 0$) il rango della matrice A è massimo, e quindi il sistema ammette una sola soluzione. Se $\alpha = \alpha_1$ o α_2, il rango della matrice incompleta è 3 mentre quello della matrice completa è 4, quindi il sistema non ha soluzione. Se $\alpha = 0$, il rango della matrice completa ed incompleta è 3, quindi il sistema ammette soluzioni, di dimensione 1. Il sottospazio W richiesto ha base $(1, 0, 0, -1)$. Si conclude facilmente che ogni V_β è in somma diretta con W per qualunque valore di β. Ad esempio, basta notare che il sistema

$$t(1, 0, 0, -1) = x(1, -1, 1 + \beta, 2) + y(0, 0, 1, 1)$$

ammette come unica soluzione $t = x = y = 0$. □

Esercizio 3 (5 punti)**.** Sia A_a, al variare del parametro a, la seguente matrice:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(1) Posto $a = 0$, dimostrare che A_0 è diagonalizzabile, trovando una base di autovettori.
(2) Discutere la diagonalizzabilità di A al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per $\alpha = 0$ la matrice diventa:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo poloniomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2-t & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = t(t-1)(t^2+t-2+2) = t^2(t-1)(t+1).$$

Calcolo gli autospazi:

$$V_0 = \langle (1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, -1) \rangle$$
$$V_1 = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$$
$$V_{-1} = \langle (1, 2, -1, 0) \rangle.$$

Il polinomio caratteristico di A_a risulta

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2-t & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-t \end{pmatrix} = (t-\alpha)(t-1)(t^2+t-2+2) =$$
$$= t(t-\alpha)(t-1)(t+1).$$

Per $\alpha \neq 0, 1, -1$ la matrice A_a è quindi diagonalizzabile (4 autovalori distinti). Per $\alpha = 0$ abbiamo già visto che A_0 è diagonalizzabile. Per $\alpha = 1$ il pol caratt è $t(t-1)^2(t+1)$ e quindi devo occuparmi dell'autospazio di autovalore 1. Il rango di

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è 3, quindi A_1 non è diagonalizzabile. Per $\alpha = -1$ il pol caratt è $t(t+1)^2(t-1)$ e quindi devo occuparmi dell'autospazio di autovalore -1. Il rango di

$$A_{-1} + 1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è 2, quindi A_1 è diagonalizzabile. □

Esercizio 4 (6 punti)**.** Sia t la retta di equazione cartesiana:

$$t : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

(a) Trovare la retta r passante per il punto $P = (0, 0, -3)$, incidente la retta t e perpendicolare ad essa. Trovare il punto di intersezione tra r e t ed indicarlo con A.
(b) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente sia t che r.
(c) Indichiamo con s la retta per A e parallela al vettore $(1, 0, 0)$. Trovare i punti di s la cui proiezione ortogonale su π abbia distanza 1 da A.

Svolgimento. La direzione di t è $(1, 2, -3)$, quindi il fascio di piani perpendicolare a t ha equazione $\pi_d : x + 2y - 3z = d$ al variare di d. Quello che passa per P ha $d = 9$ (sostituire le coordinate di P). L'intersezione tra questo piano π_0 e la retta t è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

e quindi $A = (1, 1, -2)$ (risolvendo il sistema). Per trovare r, basta allora che consideri la retta per A e P, ovvero la retta

$$r : (0, 0, -3) + \langle (0, 0, -3) - (1, 1, -2) \rangle = (0, 0, -3) + \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

L'equazione cartesiana si ottiene facilmente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases} \implies \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Chiaramente π passa per A ed il suo spazio direttore è generato da $(1, 2, -3)$, direzione di t, e $(1, 1, 1)$, direzione di r. Un vettore ortogonale sia a $(1, 1, 1)$ che a $(1, 2, -3)$ è $(5, -4, -1)$, quindi il piano richiesto è del tipo $5x - 4y - z = d$. Sostituendo le coordinate di A ottengo $d = 5 - 4 + 2 = 3$, quindi il piano richiesto è $\pi : 5x - 4y - z = 3$.

L'equazione parametrica di s è $(1+t,1,-2)$. La direzione ortogonale a π è $(5,-4,-1)$. Calcolo la proiezione ortogonale del vettore $(t,0,0)$ sul sottospazio direttore di π. Per far questo, basta che calcoli la proiezione ortogonale sul sottospazio generato da $(5,-4,-1)$ e poi faccia la differenza con il vettore $(t,0,0)$. La norma di $(5,-4,-1)$ è $\sqrt{25+16+1}=\sqrt{42}$, quindi la proiezione cercata è

$$((t,0,0)\cdot(5,-4,-1))(5,-4,-1)/42=(25t,-20t,-5t)/42.$$

La proiezione di $(1,0,0)$ sul sottospazio direttore di π è quinidi

$$(t,0,0)-(25t,-20t,-5t)/42=(22t,20t,5t)/42$$

e quindi l'equazione da imporre perchè questo vettore abbia norma 1 è

$$t^2(22^2+20^2+5^2)=42^2$$

da cui ottengo due valori di t,

$$t_{1,2}=\pm\frac{42}{\sqrt{22^2+20^2+5^2}}$$

e i due punti richiesti come $(1\pm\frac{42}{\sqrt{22^2+20^2+5^2}},1,-2)$. $\square$