

INGEGNERIA EDILE ARCHITETTURA
ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
22 MARZO 2013

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(1, 2, 3) = (6, 4, 10), \quad f(2, -1, 0) = (5, -1, 4), \quad f(0, -1, -1) = (-1, -2, -3).$$

- (1) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- (2) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- (3) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia r la retta di equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

ed s la retta passante per il punto $C = (1, 1, -3)$ e di sottospazio direttore $\langle (2, 1, 1) \rangle$.

- (1) Si determini l'equazione parametrica di r .
- (2) Si determini l'equazione cartesiana di s .
- (3) Si determini la posizione reciproca delle rette r ed s .
- (4) Si determini l'equazione cartesiana della retta ℓ incidente alle rette r ed s ed ortogonale ad entrambe.
- (5) Si determini la distanza tra r ed s .
- (6) Si determinino i punti $R \in r$ ed $S \in s$ di minima distanza.

Esercizio 3. Sia A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

definita al variare del parametro reale α . Siano poi $B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- (1) Si dica per quali valori di α il sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ ha soluzione.
- (2) Si determinino, con il metodo preferito (sostituzione o riduzione di Gauss), tutte le soluzioni del sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ in tutti i casi in cui il sistema ammette soluzione.

Esercizio 4. Consideriamo il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$U = \langle (2, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

- (1) Si determini una base ortonormale di U .
- (2) Si determini, con il metodo preferito, la matrice della proiezione ortogonale $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ su U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- (3) Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $(2, 1, 1)$ su U .