

INGEGNERIA EDILE ARCHITETTURA
ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
17 SETTEMBRE 2012

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi $aX^2 + bX + c$ nella variabile X di grado al più 2 a coefficienti reali. Sia poi $W = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi $aX^3 + bX^2 + cX + d$ nella variabile X di grado al più 3 a coefficienti reali. Sia $f : V \rightarrow W$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni seguenti:

$$f(X^2) = 2X + 1; \quad f(X) = X^3 + 2X; \quad f(1) = X^3 - 1.$$

- (1) Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\{X^2, X, 1\}$ di V e la base $\{X^3, X^2, X, 1\}$ di W .
- (2) Si calcoli il nucleo di f .
- (3) Si calcoli l'immagine di f .
- (4) Si calcoli la preimmagine $f^{-1}(X^3 + 2X)$ del vettore $X^3 + 2X$.

Soluzione. (1) Le componenti di $f(X^2)$ rispetto alla base di W assegnata sono $(0, 0, 2, 1)$; questo vettore costituisce quindi la prima colonna della matrice. Ragionando allo stesso modo con $f(X)$ e $f(1)$ si ottengono le altre due colonne. La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Il nucleo è costituito dai vettori $xX^2 + yX + z$ tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

Tali soluzioni costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 1, come si vede facilmente calcolando il rango della matrice incompleta A (determinata nel punto (1) dell'esercizio) del sistema: tale rango risulta essere 2 perchè la quarta riga di A è combinazione lineare della prima e della terza riga (si ottiene dividendo per 2 la terza riga e sottraendo la prima). Quindi, visto che A ha rango 2, risulta che il sistema omogeneo ad essa associato ha spazio di soluzioni di dimensione $3-2=1$. Un calcolo diretto mostra che un suo generatore è $(1, -1, 1)$, perciò

$$\ker(f) = \langle X^2 - X + 1 \rangle.$$

(3) La dimensione dell'immagine di f si calcola tramite il teorema delle dimensioni ($\dim(V) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f))$), e risulta 2. Una sua base è quindi costituita da una coppia di vettori linearmente indipendenti che appartengono all'immagine di f . Si ottiene quindi

$$\text{im}(f) = \langle 2X + 1, X^3 + 2X \rangle.$$

(4) Visto che $f(X) = X^3 + 2X$, la struttura dell'insieme di soluzioni di un sistema lineare ci fornisce direttamente la risposta:

$$f^{-1}(X^3 + 2X) = X + \ker(f) = X + \langle X^2 - X + 1 \rangle.$$

□

Esercizio 2. Al variare del parametro reale α , si definisca la matrice

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 4\alpha - 3 & 4\alpha & 12 \\ -4\alpha + 3 & -4\alpha & -12 \\ \alpha - 1 & \alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

- (1) Si mostri che la matrice A_0 (ottenuta sostituendo al α il valore 0) è diagonalizzabile. Si determinino in particolare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile H tali che $D = H^{-1}AH$.
- (2) Si spieghi perchè il rango di A_α è sempre minore o uguale a 2 e si calcoli il valore di α per il quale il rango di A_α è 1.
- (3) Si calcolino gli autovalori di A_α , mostrando che sono indipendenti da α .
- (4) Si mostri che l'unico valore di α per cui A_α è diagonalizzabile è $\alpha = 0$.

Soluzione. (1) La matrice A_0 risulta essere

$$A_0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & -12 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico si calcola ad esempio sviluppando lungo la seconda colonna e risulta

$$\det \begin{pmatrix} -3-t & 0 & 12 \\ 3 & -t & -12 \\ -1 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = -t \det \begin{pmatrix} -3-t & 12 \\ -1 & 4-t \end{pmatrix} = -t^2(t-1).$$

Gli autovalori sono quindi 0, 1. La molteplicità algebrica di 1 è 1, mentre quella di 0 è 2. Dunque, A_0 risulta diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di 0 è 2, ovvero se e solo se l'autospazio di A_0 relativo all'autovalore 0 ha dimensione 2. Tale autospazio si determina risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & -12 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione il sottospazio

$$V_0 = \langle (4, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle.$$

Il fatto che V_0 ha dimensione 2 si deduce dal fatto che il rango della matrice A_0 è 1, visto che le tre righe che la compongono sono l'una il multiplo dell'altra. Quindi, A_0

è diagonalizzabile. Per determinarne una base di autovettori, e quindi la matrice H , calcolo l'autospazio relativo all'autovalore 1, che consiste nella soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & -12 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La soluzione di questo sistema è $(3, -3, 1)$. Si ha quindi

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Visto che la seconda riga di A_α è uguale alla prima moltiplicata per -1 , il rango di A_α è al massimo 2. E' esattamente 2 se e solo se esiste un minore 2×2 di determinante diverso da 0. Questo avviene se e solo se almeno uno dei seguenti determinanti è non nullo:

$$\det \begin{pmatrix} -4\alpha + 3 & -4\alpha \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}; \quad \det \begin{pmatrix} -4\alpha + 3 & -12 \\ \alpha - 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \det \begin{pmatrix} -4\alpha & -12 \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

Questi determinanti valgono $-\alpha$, -4α e 4α , rispettivamente. Quindi almeno (ed in effetti tutti) uno di essi è non nullo se e solo se $\alpha \neq 0$. Perciò se $\alpha = 0$ il rango di A_α è 1 mentre se $\alpha \neq 0$ il rango di A_α è 2.

(3) Un calcolo esplicito (molto lungo) fornisce il polinomio caratteristico di A_α :

$$\det \begin{pmatrix} 4\alpha - 3 - t & 4\alpha & 12 \\ -4\alpha + 3 & -4\alpha - t & -12 \\ \alpha - 1 & \alpha & 4 - t \end{pmatrix} = -t^2(t - 1).$$

Alternativamente, visto che non sono richiesti solo gli autovalori, possiamo notare che

$$\det \begin{pmatrix} 4\alpha - 3 - t & 4\alpha & 12 \\ -4\alpha + 3 & -4\alpha - t & -12 \\ \alpha - 1 & \alpha & 4 - t \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 4\alpha - 3 - t & 4\alpha & 12 \\ -t & -t & 0 \\ \alpha - 1 & \alpha & 4 - t \end{pmatrix} = 0$$

(la prima riga alla seconda riga: si tratta di una trasformazione elementare e ricordo che il determinante di una matrice, pur cambiando, in generale, per trasformazioni elementari, ha la proprietà di essere non nullo se e solo se lo è il determinante della matrice ottenuta tramite trasformazioni elementari) e quest'ultimo determinante è nullo se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} -3 - t & 4\alpha & 12 \\ 0 & -t & 0 \\ -1 & \alpha & 4 - t \end{pmatrix} = 0$$

(sottrarre dalla prima colonna la seconda colonna: è ancora un'operazione elementare). Ora il calcolo è più semplice: l'ultimo determinante è $-t^2(t - 1)$ e quindi gli autovalori sono ancora 0, 1.

(4) Visto che 0 ha molteplicità algebrica 2, A_α risulta diagonalizzabile se e solo se il rango di A_α è $3 - 2 = 1$, e questo avviene se e solo se $\alpha = 0$, come abbiamo discusso in precedenza al punto (2). $\square$

Esercizio 3. Siano $r_1 : (1, 2, 0) + \langle (1, 0, 0) \rangle$ e $r_2 : (1, 3, 4) + \langle (1, 1, 1) \rangle$ due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

- (1) Si trovino le equazioni cartesiane di r_1 e r_2 , e si verifichi che r_1 ed r_2 sono sghembe.
- (2) Si determinino i punti di minima distanza, la retta di minima distanza e la distanza tra r_1 ed r_2 .
- (3) Detta s la retta di minima distanza tra r_1 ed r_2 , si studi al variare del parametro α l'intersezione tra la retta s ed il piano π_α di equazione

$$\pi : y + \alpha z = 3.$$

Soluzione. (1) Le equazioni cartesiane risultano

$$r_1 : \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Per ottenerle, ricordo che, ad esempio, r_1 è descritta da due equazioni del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

e che il sottospazio direttore di r_1 deve verificare il sistema omogeneo associato a queste equazioni. Questa condizione dice che $(1, 0, 0)$ deve essere soluzione di

$$\begin{cases} a = 0 \\ a' = 0 \end{cases}$$

quindi deve essere $a = a' = 0$. Possiamo quindi scegliere $b = 1, c = 0$ e $b' = 0, c' = 1$. Sostituendo poi le coordinate di $(1, 2, 0)$, punto per cui passa r_1 , nel sistema otteniamo d, d' .

Chiaramente, r_1 ed r_2 non sono parallele, avendo sottospazi direttori distinti. Inoltre, $r_1 \cap r_2$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

che non ha soluzione. Quindi, r_1 ed r_2 sono sghembe.

(2) Un punto generico di r_1 è $P_t = (1 + t, 2, 0)$ mentre un punto generico di r_2 è $Q_s = (1 + s, 3 + s, 4 + s)$. I punti di minima distanza si determinano imponendo che

$$P_t - Q_s = (t - s, -1 - s, -4 - s)$$

sia ortogonale alle rette r_1 ed r_2 , ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (t-s, -1-s, -4-s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (t-s, -1-s, -4-s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

che si riscrive come

$$\begin{cases} t-s=0 \\ t-s-1-s-4-s=0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $s = t = -5/2$. Sostituendo, ottengo i punti di minima distanza $P = (-3/2, 2, 0)$ e $Q = (-3/2, 1/2, 3/2)$. La distanza di questi due punti, che coincide con la distanza tra le due rette, è $3\sqrt{2}/2$. La retta per questi due punti, che è la retta di minima distanza, è la retta

$$s : (-3/2, 2, 0) + \langle (0, 1, -1) \rangle.$$

(3) Le equazioni cartesiane di s si ottengono svolgendo i calcoli a partire dalle equazioni parametriche di s determinate nel punto precedente. Alternativamente, s si ottiene come intersezione dei piani π_1 e π_2 passanti per r_1 ed r_2 , rispettivamente, e paralleli al vettore ortogonale sia ad r_1 che ad r_2 , che è $(0, 1, -1)$ (ovvero lo spazio direttore di s). I due piani sono

$$\pi_1 : (1, 2, 0) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, -1) \rangle$$

di equazione cartesiana $y + z = 0$, e

$$\pi_2 : (1, 3, 4) + \langle (1, 1, 1), (0, 1, -1) \rangle$$

di equazione cartesiana $-2x + y + z = 5$. Ricordo che per ottenere le equazioni cartesiane di π_1 , ad esempio, si procede come segue. π_1 è descritto da un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$, e (a, b, c) deve essere ortogonale sia a $(1, 0, 0)$ che a $(0, 1, -1)$. Svolgendo i calcoli, risulta che (a, b, c) deve essere un multiplo di $(0, 1, 1)$. Quindi π_1 è descritto da un'equazione del tipo $y + z + d = 0$. Sostituendo le coordinate di $(1, 2, 0)$ si ottiene d . Risulta quindi

$$s : \begin{cases} y + z = 0 \\ -2x + y + z = 5 \end{cases}$$

e l'intersezione di s con π_α è descritta dal sistema

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -2x + y + z = 5 \\ y + \alpha z = 3. \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

il cui determinante (sviluppare lungo la prima colonna) vale $\alpha - 1$. Dunque, il rango della matrice completa è 3 se $\alpha \neq 1$ ed è 2 se $\alpha = 1$. Nel caso in cui $\alpha \neq 1$, visto che

il rango della matrice completa è 3, il sistema risulta risolubile (rango della matrice completa uguale a quello della matrice incompleta) e le soluzioni hanno dimensione $3 - 3 = 0$ (numero di incognite meno il rango, dal teorema di Rouché-Capelli). Perciò s e π_α si intersecano in un punto. Se invece $\alpha = 1$, la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 (prima, seconda e quarta colonna sono indipendenti). Quindi, il sistema non ha soluzione. La retta s e il piano π_1 sono dunque paralleli (infatti, il sistema omogeneo associato ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1, visto che il rango della matrice incompleta è 2). $\square$

Esercizio 4. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 2)$ e $v_2 = (1, -1, -1)$.

- (1) Si trovi una base ortonormale di U .
- (2) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $w = (2, -1, 1)$ su U .

Soluzione. (1) Applico il procedimento di Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = (1/3, 2/3, 2/3). \\ u'_2 &= v_2 - (v_2 \bullet u_1)u_1 \\ &= (1, -1, -1) - ((1, -1, -1) \bullet (1/3, 2/3, 2/3))(1/3, 2/3, 2/3) \\ &= (1, -1, -1) + (1/3, 2/3, 2/3) \\ &= (4/3, -1/3, -1/3). \end{aligned}$$

Da cui, normalizzando,

$$u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = (4\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6).$$

- (2) La proiezione ortogonale si ottiene come

$$(w \bullet u_1)u_1 + (w \bullet u_2)u_2$$

ovvero

$$\begin{aligned} &((2, -1, 1) \bullet (1/3, 2/3, 2/3))(1/3, 2/3, 2/3) + \\ &+ ((2, -1, 1) \bullet (4\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6))(4\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6). \end{aligned}$$

A questo punto basta svolgere i calcoli e si ottiene

$$\begin{aligned} &(2/9, 4/9, 4/9) + (4\sqrt{2}/3)(4\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6) = \\ &= (2/9, 4/9, 4/9) + (16/9, -4/9, -4/9) = (2, 0, 0). \end{aligned}$$

$\square$