

TOPOLOGIA
15 GIUGNO 2018

M. LONGO

Esercizio 1. Sia $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che la mappa $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ definita da $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ è omotopa all'identità.

Esercizio 2. Supponiamo che X sia uno spazio topologico di Hausdorff e che G sia un gruppo finito di automorfismi di X . Indichiamo con X/G lo spazio quoziente. Dimostrare che se G agisce su X senza punti fissi, allora $X \rightarrow X/G$ è un ricoprimento.

Esercizio 3. Sia X lo spazio topologico ottenuto rimuovendo un disco chiuso D dal cilindro $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, dove $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$; per disco chiuso D intendiamo un sottospazio di $\mathcal{C}$ omeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ di X in un suo punto x_0 .

Esercizio 4. Indichiamo con $r = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ l'asse Z e con $s = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ l'asse Y di $\mathbb{R}^3$, e definiamo una terza retta $t = \{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, parallela all'asse Z . Definiamo lo spazio topologico $X = \mathbb{R}^3 - (r \cup s \cup t)$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ di X in un suo punto x_0 .

Esercizio 5. Descrivere tutti i ricoprimenti di $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$.