TOPOLOGIA

M. LONGO

Esercizio 1. Sia X lo spazio ottenuto rimuovendo da $\mathbb{R}^3$ gli assi coordinati. Trovare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ in un suo punto x_0.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ un cilindro e sia $X = \mathcal{C} - D$ lo spazio ottenuto rimuovendo dal cilindro un disco chiuso D omeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Trovare il gruppo fondamentale di $\pi(X, x_0)$ in un suo punto x_0.

Esercizio 3. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la mappa definita da

$$f(x, y) = (x + 2\cos(2\pi y), x - y + 3\sin(4\pi x))$$

ed indichiamo con lo stesso simbolo $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ la mappa indotta sul toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tramite passaggio al quoziente. Si calcoli la mappa $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{T}, x_0) \to \pi_*(\mathbb{T}, x_0)$ indotta da φ sul gruppo fondamentale del toro nel suo punto $x_0 = (0, 0)$.

Esercizio 4. Trovare uno spazio topologico X ed un suo ricoprimento $p : \tilde{X} \to X$ tale che $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Quanti sono i ricoprimenti $q : Y \to X$ (compresi quelli triviali) che si ottengono come quoziente di $\tilde{X}$? Descriverli nel caso dell'esempio scelto.

Esercizio 5. Siano X ed Y due spazi topologici che ammettono ricoprimento universale, e denotiamo con $p : \tilde{X} \to X$ e $q : \tilde{Y} \to Y$ i loro ricoprimenti universali. Sia $f : X \hookrightarrow Y$ una mappa continua ed iniettiva. Il criterio del rialzamento delle mappe continue, combinato al fatto che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, mostra che esiste una mappa continua $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ tale che $q \circ \tilde{f} = f \circ p$. Dimostrare che la mappa $\tilde{f}$ è iniettiva se e solo se la mappa indotta $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ sui gruppi fondamentali è iniettiva.