

TOPOLOGIA
20 SETTEMBRE 2017

MATTEO LONGO

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{R}^3 - Y$ lo spazio topologico ottenuto rimuovendo da $\mathbb{R}^3$ l'insieme

$$Y = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} \cup \{2, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$$

formato da un cerchio di raggio 1 e centro $(0, 0, 0)$, sul piano Oxy , una retta parallela all'asse z e passante per il punto $(2, 0, 0)$ (esterno al cerchio) ed una retta parallela all'asse y e passante per lo stesso punto. Trovare $\pi_1(X, x_0)$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ un cilindro e sia $X = \mathcal{C} - D$ lo spazio ottenuto rimuovendo dal cilindro un disco chiuso D omeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Trovare il gruppo fondamentale di $\pi(X, x_0)$ in un suo punto x_0 .

Esercizio 3. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la mappa definita da

$$f(x, y) = (x + 2 \cos(2\pi y), x - y + 3 \sin(4\pi x))$$

ed indichiamo con lo stesso simbolo $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ la mappa indotta sul toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tramite passaggio al quoziente. Si calcoli la mappa $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{T}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}, x_0)$ indotta da φ sul gruppo fondamentale del toro nel suo punto $x_0 = (0, 0)$.

Esercizio 4. Trovare uno spazio topologico X ed un suo ricoprimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ tale che $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$. Quanti sono i ricoprimenti $q : Y \rightarrow X$ (compresi quelli triviali) che si ottengono come quoziente di $\tilde{X}$? Descriverli nel caso dell'esempio scelto.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi e sia G un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su X . Sia infine H un sottogruppo di G .

- (1) Dimostrare che anche H agisce in modo propriamente discontinuo su X .
- (2) Dimostrare che la mappa $X/H \rightarrow X/G$ indotta dall'inclusione $H \subseteq G$ è un ricoprimento.
- (3) Dimostrare che se $n = [G : H]$ è l'indice (che supponiamo finito) di H in G , allora $X/H \rightarrow X/G$ è un ricoprimento ad n fogli.