

TOPOLOGIA
20 SETTEMBRE 2017

MATTEO LONGO

Ogni esercizio vale 6 punti. Giustificare tutte le risposte.

Esercizio 1. Trovare il gruppo fondamentale del toro meno due punti.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}^3 - Y$ lo spazio topologico ottenuto rimuovendo da $\mathbb{R}^3$ l'insieme

$$Y = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} \cup \{2, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$$

formato da un cerchio di raggio 1 e centro $(0, 0, 0)$, sul piano Oxy , una retta parallela all'asse z e passante per il punto $(2, 0, 0)$ (esterno al cerchio) ed una retta parallela all'asse y e passante per lo stesso punto.

Esercizio 3. Trovare uno spazio topologico X ed un suo ricoprimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ tale che $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Quanti sono i ricoprimenti $q : Y \rightarrow X$ (compresi quelli triviali) che si ottengono come quoziente di $\tilde{X}$? Descriverli nel caso dell'esempio scelto.

Esercizio 4. Sia $A \subseteq X$ un sottospazio di uno spazio topologico X , e sia $r : X \rightarrow A$ una retrazione. Dimostrare che se X è Hausdorff, allora A è chiuso in X .

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi e sia G un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su X . Sia infine H un sottogruppo di G .

- (1) Dimostrare che anche H agisce in modo propriamente discontinuo su X .
- (2) Dimostrare che la mappa $X/H \rightarrow X/G$ indotta dall'inclusione $H \subseteq G$ è un ricoprimento.
- (3) Dimostrare che se $n = [G : H]$ è l'indice (che supponiamo finito) di H in G , allora $X/H \rightarrow X/G$ è un ricoprimento ad n fogli.