Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2011-2012

Roberto Monti

Versione del 20 Dicembre 2011

Contents

CHAPTER 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\}, \\ A \cap B &= \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}. \end{aligned}$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'insieme vuoto, si indica con $\emptyset$. Due insiemi A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B', \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'. \end{aligned}$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\}, \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}. \end{aligned}$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda', \quad \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda',$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda, \quad X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\} \\ &= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f.

Proposizione 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:[1]

$$\begin{aligned} & f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \\ & f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dim. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

[1]Notare la correzione: $\subset$ sostituisce $=$ nell'immagine dell'intersezione. Regola: non credere alle affermazioni senza dimostrazione.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\ &\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

Notare che abbiamo tutte equivalenze tranne l'implicazione centrale che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda \ : \ \text{Affermazione}(x, \lambda) \ \Rightarrow \ \forall \lambda \exists x \ : \ \text{Affermazione}(x, \lambda),$$

che non può essere invertita. □

Definizione 1.4. Una funzione $f : A \to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$f : A \xrightarrow{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow{\text{su}} B \quad \text{funzione suriettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva e suriettiva.}$$

Definizione 1.5 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva eè suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$.Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \text{identità su } A,$$
$$f \circ f^{-1} = \text{identità su } B.$$

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile, e cioè vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$. Non dimostreremo questo teorema la cui prova richiede l'assioma della scelta.

Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$. Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

Teorema 2.2 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

Dim. Consideriamo preliminarmente una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{2.2}$$

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando la proprietà (1.1) e la (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando all'inclusione $F \subset T(F)$ nuovamente T si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva l'ordine. Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

PROPOSIZIONE 2.3. Per ogni insieme A risulta $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

DIM. Certamente $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:

Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.

Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\mathrm{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\mathrm{Card}(A) = \infty$.

Enunciamo senza provare il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio.

Esempio 3.2. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

Definizione 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots a_n, \dots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.2 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia infatti, $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e surittiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.4. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \to \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \to \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \quad \Leftrightarrow \quad p_n^j = p_m^k \quad \Leftrightarrow \quad n = m,\ j = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione.*

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{4.3}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k \\ &= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^{n+1-k}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \le n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi vari

Esercizio 5.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
3) Dire se f è iniettiva.
4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 5.2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la seguente disuguaglianza:

$$xy \le \frac{1}{2}\Big(tx^2 + \frac{1}{t}y^2\Big).$$

Esercizio 5.3. Verificare che $\log_{10}^2 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 5.4. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \to D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \to D$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine (totale) e relazione d'ordine parziale.

DEFINIZIONE 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che a è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

DEFINIZIONE 1.2 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Se si lascia cadere ii) si ottiene una relazione di *ordine parziale.*

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.* Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

DEFINIZIONE 2.1. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) definiscono un *campo*. Aggiungendo gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*. Aggiungendo l'assioma di completezza si ottiene un *campo ordinato completo*. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato.

Proposizione 2.2. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Per provare questa affermazione si osservi che in campo ordinato ogni elemento x verifica $x^2 \geq 0$ (vedi l'Esercizio **??**). Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\geq$. L'unità immaginaria i dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. $\square$

L'assioma di completezza può essere formulato in vari modi equivalenti fra loro. Elenchiamo cinque affermazioni che sono equivalenti:

1) Ogni sottoinsieme non vuoto e superioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo superiore.
2) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.
3) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
4) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

Definizione 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo
$$\sup A = x.$$
iv) Se A non è superioremente limitato porremo
$$\sup A = \infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

Definizione 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo
$$\inf A = x.$$
iv) Se A non è inferiormente limitato porremo
$$\inf A = -\infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\min A = x.$$

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme
$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$
è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:
$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$
che è una contraddizione. □

Definizione 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme
$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$
Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x

è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera di* x

$$[x] = \max\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di* x è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \leq y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \leq y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi.

□

2.2. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$. La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema. Nel seguito verrà illustrata una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$, che prescinde dalla relazione d'ordine.

Definizione 2.8. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \leq a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \leq B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\leq$.

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A \neq 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

Teorema 2.9. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

Dim. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in B$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

3. Esercizi vari

Esercizio 3.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 3.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{ n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 3.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{ x \in X : d(x, x_0) < r \big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Notazione per gli intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\big\} && \text{intervallo aperto a destra,}\\
(a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\big\} && \text{intervallo aperto a sinistra,}\\
[a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\big\} && \text{intervallo chiuso.}
\end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned}
(-\infty,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
(-\infty,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\big\} && \text{intervallo chiuso,}\\
(a,\infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x > a\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a,\infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\big\} && \text{intervallo chiuso,}
\end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$. Vedremo la nozione di *insieme connesso* in seguito.

5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare.* Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

In questo modo $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

Definizione 5.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$;
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
3) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 5.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 5.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

CHAPTER 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale (risp. complessa)* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (risp. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ (risp. $a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento* n*-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione*.

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\Big|\frac{n}{n+1} - 1\Big| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. □

Osservazione 1.4. Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lasciamo come esercizio la verifica di questa affermazione: una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Definizione 1.5. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esempio 1.6. Verifichiamo usando la definizione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}. \tag{1.5}$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \leq n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} \geq n^2 \frac{n-1}{n^2+10}.$$

Riduciamo ulteriormente la complessità della disuguaglianza. Per $n \geq 4$ si ha $n^2 + 10 \leq 2n^2$, e quindi con tale restrizione su n si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} \geq \frac{n-1}{2}.$$

Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M+1.$$

Con la scelta $\bar{n} = \max\{4, [2M+1]+1\}$, la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 1.7. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \ldots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

TEOREMA 1.8 (Proprietà generali dei limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ (risp. $L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $n \in \bar{\mathbb{N}}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.7, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \leq |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\Big| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

Teorema 1.9 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon,$$
$$L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon,$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

Definizione 1.10. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.11. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.1. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R} \\ Q(x) &= b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$. Senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si veda l'Esercizio 5 del Foglio 1. Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Dall'identità $|z^n| = |z|^n$ si deduce che per $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Se invece $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$ il limite non esiste.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Esercizi vari

Esercizio 3.1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Esercizio 3.2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \Big).$$

Esercizio 3.3. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, studiare la convergenza della successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{1}{b^n} \binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4. Successioni monotone

DEFINIZIONE 4.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

PROPOSIZIONE 4.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme $A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 4.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 4.2 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

ESERCIZIO 4.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

5. Il numero e

Nel seguente teorema con $x = 1$ si definisce il numero e di Nepero. Anticipiamo la nozione di somma infinita, che verrà introdotta nel prossimo capitolo.

Teorema 5.1. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito:

$$\mathrm{e}^x := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n. \tag{5.6}$$

Inoltre risulta

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{5.7}$$

Dim. Iniziamo con il caso $x > 0$. Proveremo che la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 4.2 segue l'esistenza finita del limite (5.6).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene

$$a_n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{x^k}{k!}, \tag{5.8}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \frac{x^k}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big), \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big),$$

per $k = 0, 1, \dots, n$, e dal fatto che $x^k > 0$ segue che $a_n < a_{n+1}$. Siccome

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < 1, \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (5.8) si trova anche la maggiorazione

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{5.9}$$

Scegliamo ora un numero naturale $m \in \mathbb{N}$ tale che $x < m \le n$ e spezziamo la somma nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!}.$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k! = k(k-1)\cdot \ldots \cdot (m+1)m! > m^{k-m}m!$. D'altra parte, dalla formula per la somma geometrica parziale, si ottiene

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!} = \frac{x^m}{m!} \sum_{k=m}^{n} \frac{x^{k-m}}{m^{k-m}} = \frac{x^m}{m!} \sum_{h=0}^{n-m} \left(\frac{x}{m}\right)^h = \frac{x^m}{m!} \frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-x/m} < \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}.$$

Abbiamo usato il fatto che $m > x$. In conclusione, troviamo la maggiorazione indipendente da n:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}. \tag{5.10}$$

Questo termina la prova dell'esistenza finita del limite. Passando al limite nella disuguaglianza (5.9) si trova

$$\mathrm{e}^x \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Una volta provata la disuguaglianza opposta, si ottiene la tesi (5.7).

Ripartiamo dall'identità (5.8) dove, come sopra, $n \ge m > x$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} \\ &\ge \sum_{k=0}^{m-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} - \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}. \end{aligned}$$

In questa disuguaglianza passiamo al limite per $n \to \infty$ e otteniamo la disuguaglianza

$$\mathrm{e}^x \ge \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x},$$

che vale per ogni $m > x$. Passando ora al limite per $m \to \infty$ e osservando che

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x} = 0,$$

si ottiene la disuguaglianza cercata:

$$\mathrm{e}^x \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Discutiamo infine il caso $x < 0$. Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n = 1.$$

Questo segue dal Teorema del confronto a partire dalle disuguaglianze (usiamo la disuguaglianza di Bernoulli)

$$1 > \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Dunque, per $x > 0$ si trova

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\Big)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Ovvero, $\mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)^{-1}$. □

La formula (5.7) è stata provata solo per $x > 0$, ma vale per ogni $x \in \mathbb{R}$. La prova è omessa.

Osservazione 5.2. Per il Teorema 5.1, risulta definita una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Elenchiamo alcune proprietà di questa funzione.

1) Si ha $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo deriva dal fatto che definitivamente si ha
$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n > 0,$$
e che la successione è crescente.
2) La funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ è strettamente crescente. Questo è chiaro, quando $x > 0$, dalla formula
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$
3) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y.$$
In altri termini, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ è un omomorfismo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Una prova di tale identità si può ottenere mostrando che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big(1 + \dfrac{x+y}{n}\Big)^n}{\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n\Big(1 + \dfrac{y}{n}\Big)^n} = 1.$$

Osservazione 5.3. Il numero di Nepero è per definizione

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Sappiamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e} > \sum\limits_{k=0}^{m-1} 1/k!$. Con la scelta $m = 4$ si ottiene la stima dal basso

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la (5.10) con $x = 1$:

$$\mathrm{e} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{m}{m!(m-1)},$$

che con $m = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} < 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

6. Limiti inferiore e superiore

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definiscano:

$$b_n = \inf\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \inf_{m\geq n} a_m,$$
$$c_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \sup_{m\geq n} a_m.$$

Può essere $b_n = -\infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ ovvero per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Può essere $c_n = \infty$ per qualche, ovvero per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che questa situazione banale non avvenga.

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente in quanto al crescere di n, l'insieme di cui si calcola l'estremo inferiore si restringe. Analogamente, la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente. Dunque, esistono i limiti

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Definizione 6.1 (Limiti inferiore e superiore). Si definiscono i limiti inferiore e superiore di una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente come:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

La comodità dei limiti inferiore e superiore è che sono sempre definiti. Chiaramente, vale sempre la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Proposizione 6.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > L - \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n < L + \varepsilon$.

Dim. Sia $L = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m$, ovvero L è il massimo dei minoranti dell'insieme $A = \{c_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, con $c_n = \sup_{m\geq n} a_m$. Siccome L è un minorante:

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} : \sup_{m\geq \bar{n}} a_m \geq L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \geq \bar{n} : a_n > L - \varepsilon.$$

Abbiamo in effetti provato che L è un minorante di A se e solo se vale i).

Inoltre, L è il massimo dei minoranti. Dunque, $L+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ non è un minorante. Ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \sup_{m \geq \bar{n}} a_m < L + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : a_n < L + \varepsilon.$$

Abbiamo in affetti provato che L è il massimo dei minoranti se e solo se vale l'affermazione ii). $\square$

Per il limite inferiore si ha un'analoga caratterizzazione che riportiamo senza prova.

Proposizione 6.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < L + \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n > L - \varepsilon$.

Mettendo insieme l'affermazione ii) della Proposizione 6.2 con l'affermazione ii) della Proposizione 6.3 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 6.4. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Allora il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

esiste finito se e solo se

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = L.$$

Questo corollario vale anche quando $L = \infty$ oppure $L = -\infty$.

Osservazione 6.5. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali. Valgono sempre le seguenti disuguaglianze:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n),$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \geq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n),$$

e le disuguaglianze possono essere strette. Se una delle successioni converge, tuttavia, si hanno uguaglianze. Omettiamo la prova di queste affermazioni.

Esempio 6.6. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{n^2+1}.$$

Proviamo che

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Partiamo dal limite superiore. Chiaramente, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \leq 1 < 1 + \varepsilon.$$

D'altra parte, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ posso trovare $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > 1 - \varepsilon$, in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = 1.$$

Per il limite inferiore si argomenta in modo analogo. Da un lato si ha $a_n \geq -1 > -1-\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < -1 + \varepsilon$ in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1} = -1.$$

7. Teorema di Bolzano-Weierstrass

Vogliamo definire la nozione di sottosuccessione.

Definizione 7.1. Una selezione crescente di indici è una funzione (successione) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è strettamente crescente, $k(n) < k(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scriveremo $k_n = k(n)$.

Definizione 7.2. Una *sottosuccessione* di una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione della forma $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ selezione crescente di indici.

Sappiamo che tutte le successioni convergenti sono limitate. Le successioni limitate in generale non sono convergenti, ma hanno sempre una sottosuccessione convergente.

Teorema 7.3. Ogni successione reale limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente.

Questo teorema vale anche per le successioni complesse (estrarre una sottosuccessione della parte reale e poi un'ulteriore sottosuccessione da quella immaginaria). La dimostrazione del Teorema 7.3 si basa sul Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Definizione 7.4. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se per ogni $\delta > 0$ si ha

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset,$$

ovvero, equivalentemente, se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Ricordiamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $A \subset [a, b]$.

Teorema 7.5 (Bolzano-Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato con $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Allora A ha almeno un punto di accumulazione.

Dim. La dimostrazione si basa sul metodo di *dicotomia*. Siccome A è limitato esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $A \subset [a, b]$. Definiamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e sia $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio. Consideriamo i due intervalli $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$. Uno dei due intervalli deve contenere infiniti elementi di A. Sia ad esempio $[a_0, c_0]$. Allora definiamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$. Si hanno le disuguaglianze

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0, \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0).$$

Procediamo ora in modo induttivo. Supponiamo di aver già scelto dei numeri $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ con queste proprietà:

i) $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$;
ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$;

iii) L'intervallo $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A.

Selezioniamo dei numeri a_{n+1} e b_{n+1} nel seguente modo. Definiamo $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Uno dei due intervalli $[a_n, c_n]$ e $[c_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A. Supponiamo sia ad esempio il secondo. Definiamo allora $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. Le affermazioni i), ii), iii) sono allora verificate con $n+1$ al posto di n.

Abbiamo costruito una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona crescente e superiormente limitata, ed una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona decrescente inferiormente limitata. Dunque esistono finiti i limiti

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad M = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dalla proprietà iii) segue che

$$M - L = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0,$$

e dunque $L = M$. Proviamo che il punto $x_0 = L = M$ è di accumulazione per A. Fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n - a_n < \delta$. Questo è certamente possibile. Siccome $a_n < x_0 < b_n$, si ha $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_\delta(x_0)$. Siccome $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi e dunque certamente $A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. □

Dimostrazione del Teorema 7.3. Si consideri l'insieme $A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$. Se A contiene un numero finito di elementi, allora almeno uno di questi ricorre per infinite scelte di indici e si può estrarre una sottosuccessione costante.

Possiamo supporre $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, A ha un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $\delta = 1/n$, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k_n} \in I_{1/n}(x_0)$. È possibile selezionare in modo ricorsivo k_n in modo tale che $k_n > k_{n-1}$. Quindi $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dalla disuguaglianza

$$|a_{k_n} - x_0| \leq \frac{1}{n}$$

segue che $a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. □

8. Successioni di Cauchy. Completezza metrica di $\mathbb{R}$

Definizione 8.1 (Successione di Cauchy). Una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 8.2. Una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se è di Cauchy.

Dim. Proviamo il Teorema nel caso delle successioni reali. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che converge ad un numero $L \in \mathbb{R}$ e proviamo che è di Cauchy. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$. Dunque, per $n, m \geq \bar{n}$ si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| \leq 2\varepsilon.$$

Supponiamo viceversa che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Proviamo preliminarmente che la successione è limitata. Infatti, scelto $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < 1$ per $m, n \geq \bar{n}$, e in particolare per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|a_n| \leq |a_{\bar{n}}| + |a_n - a_{\bar{n}}| \leq 1 + |a_{\bar{n}}|,$$

e dunque, per un generico $n \in \mathbb{N}$ si ha la maggiorazione

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_{\bar{n}-1}|, 1 + |a_{\bar{n}}|\}.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ovvero esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L.$$

Proviamo che vale anche $a_n \to L$ per $n \to \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ dato dalla condizione di Cauchy, ovvero $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. Scegliamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $n_k \geq \bar{n}$ e $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$. Allora, per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. La dimostrazione nel caso complesso è identica, basterà usare il Teorema di Bolzano-Weierstrass nel caso complesso. □

Il Teorema 8.2 si può riformulare nel seguente modo: I numeri reali $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea formano uno *spazio metrico completo*. Analogamente, il piano complesso $\mathbb{C}$ con la distanza Euclidea è uno spazio metrico completo

I numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, non sono invece uno spazio metrico completo. Infatti, la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ con tale distanza ma non converge ad un elemento di $\mathbb{Q}$. Infatti, il valore limite della successione è il numero $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

9. Criteri di convergenza di Cesàro

I criteri di Cesàro sono utili per calcolare limiti che presentano forme indeterminate del tipo $[\infty/\infty]$ oppure $[0/0]$.

Teorema 9.1 (Cesàro I). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali e supponiamo che:

i) La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente e $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;
ii) Esiste (finito) il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Dim. Osserviamo che[1] si può supporre $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Affermiamo che per ogni $\delta < L$ si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \delta. \tag{9.11}$$

Dalla arbitrarietà di δ segue la stima anche per L:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq L. \tag{9.12}$$

Applicando questa disuguaglianza alla coppia di successioni $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativamente al limite $-L$, si trova

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-a_n}{b_n} \geq -L,$$

che è equivalente a (Esercizio)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L. \tag{9.13}$$

Da (9.12) e (9.13) segue la tesi.

Rimane da provare (9.11). Esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \geq \delta.$$

Ricordando che $b_{n+1} - b_n > 0$, questa disuguaglianza è equivalente a $a_{n+1} - a_n \geq \delta(b_{n+1} - b_n)$. Dunque, se $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq \bar{n}$ si trova

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{i=1}^{k} (a_{n+i} - a_{n+i-1}) \geq \delta \sum_{i=1}^{k} (b_{n+i} - b_{n+i-1}) = \delta(b_{n+k} - b_n).$$

In particolare, dividendo per $b_{n+k} > 0$, si trova

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq \frac{a_n}{b_{n+k}} + \delta\Big(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\Big).$$

Facendo ora il limite per $k \to \infty$ con n fissato, si deduce che

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq \delta.$$

Questo termina la dimostrazione. $\square$

Teorema 9.2 (Cesàro II). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali infinitesime, con $b_n \neq 0$ per $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia strettamente monotona e che esista (finito) il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

[1] La parte da qui fino al termine della sezione è fuori programma.

Dim. Supponiamo ad esempio che sia $b_{n+1} > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $b_n < 0$. Come nel teorema precedente si mostra che per ogni $\delta < L$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_{n+k} - a_n \geq \delta(b_{n+k} - b_n).$$

Passando al limite per $k \to \infty$ si trova $a_n \leq \delta b_n$, e dunque

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \delta \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \lambda.$$

E ora si conclude come nel teorema precedente. $\square$

CHAPTER 4

Serie reali e complesse

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione reale, risp. complessa. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica nel seguente modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1.14}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale o complesso. Chiameremo un'espressione come in (1.14) una serie reale (risp. complessa).

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere, può divergere a ∞ o $-\infty$ (nel caso reale), oppure può non convergere.

Definizione 1.1 (Serie convergente). Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $s \in \mathbb{R}$ (risp. $s \in \mathbb{C}$), porremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

Nel caso reale, se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$.

Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite, nè finito nè infinito, diremo che la serie *non converge.*

Il generico addendo a_n che appare nella serie (1.14) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 1.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Siccome la successione delle somme parziali converge, allora è di Cauchy. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ e $p \geq 0$ si ha

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon.$$

Con la scelta $p = 1$ si ottiene $|s_n - s_{n+1}| = |a_{n+1}| < \varepsilon$. Questo prova il teorema. □

2. Serie geometrica. Serie telescopiche

2.1. Serie geometrica. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $z \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $|z| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Se invece $|z| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se ora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Iniziamo con il Criterio del confronto.

Teorema 3.1 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$

La verifica del Teorema segue dall'analogo enunciato per le successioni.

TEOREMA 3.2 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

DIM. i) Esistono $q \in (0,1)$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Questo prova la convergenza della serie.

ii) Esiste $q > 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un indice $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > q$. Inoltre, è possibile scegliere $k_n < k_{n+1}$. La sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie diverge.

□

TEOREMA 3.3 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

DIM. i) Esistono $q \in (0,1)$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $a_{n+1}/a_n \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q a_{n-1} \leq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e pertanto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Questo prova la convergenza della serie.

ii) Come sopra, si arriva alla disuguaglianza $a_n \geq q a_{n-1} \geq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$ dove ora $q > 1$. Non è dunque verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali

TEOREMA 4.1 (Criterio di Cauchy). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa, monotona decrescente. Allora si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

DIM. Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $i \in \mathbb{N}$ un indice tale che $2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1$. Ci sono 2^{n-1} tali indici. Siccome la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente si ha $a_i \leq a_{2^{n-1}}$. Dunque, sommando su tali i si ottiene

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq a_{2^{n-1}}(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Sommando ora su n si ottiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Se converge la serie a destra, allora per confronto converge anche la serie a sinistra. Se diverge la serie a sinistra, diverge anche la serie a destra.

Proviamo le implicazioni opposte. Se l'indice $i \in \mathbb{N}$ verifica $2^{n-1} + 1 \leq i \leq 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora $a_i \geq a_{2^n}$. Sommando su tali i e poi su $n \in \mathbb{N}$, si trova

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

Per confronto, se converge la serie a sinistra, converge anche la serie a destra. □

ESEMPIO 4.2 (Serie armonica generalizzata). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

La successione $a_n = 1/n^\alpha$, $n \geq 1$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^n.$$

Se $\alpha > 1$ si ha una serie geometrica convergente. Se $0 < \alpha \leq 1$ la serie diverge. Dunque, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

ESEMPIO 4.3 (Serie logaritmiche). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}.$$

La successione $a_n = 1/(n\log^\alpha n)$, $n \geq 2$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\alpha 2}.$$

Per quanto visto sulla serie armonica generalizzata, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$.

5. Rappresentazione dei reali in base b

In questa sezione discutiamo il problema di rappresentare numeri reali tramite allineamenti infiniti di cifre. Ci restringiamo a numeri reali $x \in [0,1)$.

Sia $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$ un *base* e introduciamo l'insieme delle cifre ammissibili $\{0,1,2,\dots,b-1\}$. Quando $b = 10$ avremo la *rappresentazione decimale* di un numero reale, quando $b = 2$ avremo la *rappresentazione binaria*.

Definizione 5.1. Una *rappresentazione in base* b di un numero reale $x \in [0,1)$ è un allineamento di cifre

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\},$$

dove l'uguaglianza è da intendersi nel senso

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n}.$$

La rappresentazione si dice *propria* se non esiste alcun $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = b-1$ per ogni $n \geq m$.

Osserviamo che se $\alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non è identicamente $\alpha_n = b-1$, allora si ha

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n} < (b-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{n-1}} = \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-1/b} = 1.$$

Teorema 5.2. Sia $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Ogni numero reale $x \in [0,1)$ ha un'unica rappresentazione propria in base b,

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\}.$$

Dim. Iniziamo con il provare l'esistenza di una rappresentazione propria in base b. Affermiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esistono delle cifre $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\}$ ed un "errore" $x_n \in [0,1)$ tali che

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_n}{b^n}. \tag{5.15}$$

La verifica di tale affermazione è per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

Partiamo dalla base induttiva $n = 1$. Osserviamo che

$$0 \leq bx < b \in \mathbb{N} \quad \text{e quindi} \quad 0 \leq [bx] \leq b-1.$$

Il numero così definito $\alpha_1 = [bx]$ verifica allora $0 \leq \alpha_1 \leq b-1$. Inoltre si ha

$$x = \frac{\alpha_1}{b} + \frac{x_1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = bx - \alpha_1 = bx - [bx] = \{bx\} \in [0,1).$$

Dunque $x_1 = \{bx\}$ è la nostra definizione di x_1.

Supponiamo ora di avere la formula (5.15) per un certo $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo trovare la stessa formula per $n+1$. Precisamente, dobbiamo trovare la cifra $\alpha_{n+1} \in \{0, 1, ..., b-1\}$ e l'errore $x_{n+1} \in [0, 1)$.

Applichiamo l'argomento della base induttiva al numero reale $x_n \in [0, 1)$ e troveremo $\alpha_{n+1} \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ e $x_{n+1} \in [0, 1)$ tali che

$$x_n = \frac{\alpha_{n+1}}{b} + \frac{x_{n+1}}{b}.$$

Sostituendo nella (5.15) si ottiene

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{\alpha_{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{b^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_{n+1}}{b^{n+1}}.$$

Questo termina la verifica della (5.15).

Ora osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b^n} = 0,$$

in quanto si ha il prodotto di una successione infinitesima con una limitata. Passando al limite per $n \to \infty$ in (5.15) si ottiene la rappresentazione di x in base b

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k}.$$

Ora proviamo che la rappresentazione è propria. Supponiamo per assurdo che esista $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = b-1$ per ogni $n > m$. Avremo, per un certo $x_m \in [0, 1)$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_m}{b^m} = x = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{b^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k},$$

da cui si deduce che

$$x_m = b^m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k} = \frac{b-1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} = 1,$$

e questo è assurdo.

Rimane da provare che esiste un'unica rappresentazione propria. Supponiamo di avere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{b^n},$$

con $\alpha_n, \beta_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ tali che non siano definitivamente $b-1$. Proviamo che $\alpha_1 = \beta_1$. Se per assurdo così non fosse avremmo

$$0 \neq \frac{\alpha_1 - \beta_1}{b} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{b^n}.$$

Esiste certamente $n \geq 2$ (in effetti esistono infiniti tali n) per cui $|\beta_n - \alpha_n| < b-1$. Quindi

$$\Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{b^n} \Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\beta_n - \alpha_n|}{b^n} < (b-1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b^2} \frac{1}{1-1/b} = \frac{1}{b}.$$

Questo è assurdo, in quando

$$\left|\frac{\alpha_1-\beta_1}{b}\right| \geq \frac{1}{b}.$$

Ora per induzione si prova che $\alpha_n = \beta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Usando le rappresentazioni decimali o binaria è agevole provare vari risultati sulla cardinalità dei reali.

Teorema 5.3. L'insieme dei numeri reali non è numerabile.

Dim. Sappiamo che $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}([0,1))$. Quindi è sufficiente provare che l'insieme $[0,1)$ non è numerabile. Supponiamo per assurdo che $[0,1)$ sia numerabile. Allora potremmo elencare i suoi elementi

$$[0,1) = \big\{x_n : n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Ciascun reale $x_n \in [0,1)$ ha un'unica rappresentazione decimale propria

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \alpha_1^1\alpha_1^2 \ldots \alpha_1^m \ldots \\ x_2 &= 0, \alpha_2^1\alpha_2^2 \ldots \alpha_2^m \ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, \alpha_n^1\alpha_n^2 \ldots \alpha_n^m \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

dove le cifre verificano $\alpha_n^m \in \{0,1,\ldots,9\}$ e inoltre la successione $m \mapsto \alpha_n^m$ non è mai (per nessun n) definitivamente 9.

Possiamo scegliere $\beta_1 \in \{0,1,\ldots,8\}$ con $\beta_1 \neq \alpha_1^1$, $\beta_2 \in \{0,1,\ldots,8\}$ con $\beta_2 \neq \alpha_2^2$, e in generale $\beta_m \in \{0,1,\ldots,8\}$ con $\beta_m \neq \alpha_m^m$, $m \in \mathbb{N}$. Per l'unicità della rappresentazione decimale propria, il numero

$$x = \sum_{m=1} \frac{\beta_m}{10^m} \in [0,1)$$

verifica $x \neq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è assurdo. □

Il criterio di selezione utilizzato nella dimostrazione precedente si ispira al metodo di *selezione diagonale di Cantor*. Il teorema precedente può essere migliorato. In effetti, si ha $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. La prova di questo teorema, che è omessa, si basa sulla rappresentazione binaria dei numeri reali.

Teorema 5.4. Risulta $\mathrm{Card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Dim. È sufficiente provare che $\mathrm{Card}([0,1)\times[0,1)) = \mathrm{Card}([0,1))$. Consideriamo la funzione $f : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)$ definita nel seguente modo. Siano $x, y \in [0,1)$ dati dalla rappresentazione binaria propria

$$\begin{aligned} x &= 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \\ y &= 0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots, \end{aligned}$$

dove $\alpha_n, \beta_n \in \{0,1\}$ non sono definitivamente 1. Definiamo $f(x,y)$ come il numero reale in $[0,1)$ con rappresentazione decimale propria

$$f(x,y) = 0, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n \ldots.$$

La funzione f è iniettiva per l'unicità della rappresentazione decimale propria. Se, infatti, $f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y})$ allora si ha ha

$$0, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n \ldots = 0, \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_2 \ldots \bar{\alpha}_n\bar{\beta}_n \ldots \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \bar{\alpha}_n \text{ e } \beta_n = \bar{\beta}_n,\ n \in \mathbb{N},$$

e quindi $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, dove le espressioni con $^-$ sono legate nel modo naturale. □

6. Esercizi vari

Esercizio 6.1. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \log(1 + |x|^n).$$

Esercizio 6.2. Al variare dei numeri reali $a, b > 0$ discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}.$$

Esercizio 6.3. Al variare del numero reale $a > 0$ discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 6.4. Al variare del numero reale $x > 1$ discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 6.5. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big).$$

Esercizio 6.6. Discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x>0} \Big(\frac{x}{1+x^n}\Big)^n.$$

7. Convergenza assoluta di serie reali e complesse

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie complesse e di serie reali non necessariamente positive.

DEFINIZIONE 7.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

TEOREMA 7.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche in senso ordinario (semplicemente) ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{7.16}$$

DIM. Iniziamo a considerare il caso in cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione reale e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa della successione nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \leq |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \leq -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, dalla disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

segue la tesi (7.16). Questo termina la prova nel caso reale.

Sia ora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa e definiamo $\alpha_n = \mathrm{Re}(\alpha_n)$ e $\beta_n = \mathrm{Im}(a_n)$. Dalle disuguaglianze $|\alpha_n| \leq |a_n|$ e $|\beta_n| \leq |a_n|$ deduciamo che le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

convergono assolutamente e quindi semplicemente. Converge allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

La prova di (7.16) è identica al caso reale. $\square$

8. Primo criterio di Abel-Dirichlet. Criterio di Leibniz

In questa sezione vogliamo studiare la convergenza di serie reali oscillanti della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0,$$

e di serie complesse della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

LEMMA 8.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n(a_{n+1} - a_n), \tag{8.17}$$

dove abbiamo posto $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ per $n \geq 1$ e convenuto che $B_0 = 0$.

DIM. La verifica è elementare e parte dall'identità $b_n = B_n - B_{n-1}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n(a_{n+1} - a_n).
\end{aligned}$$

□

Per analogia con gli integrali potremmo chiamare la successione delle somme parziali $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ la *primitiva* della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

TEOREMA 8.2 (Criterio di Abel–Dirichlet I). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa con primitiva limitata: esiste $C > 0$ tale che $|B_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

DIM. Usando la formula di somma per parti (8.17) si trova

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

Dalla disuguaglianza $|a_n B_n| \le C|a_n|$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} a_n B_n = 0.$$

Se proviamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

converge assolutamente, dal Teorema sulla convergenza assoluta, la serie converge anche semplicemente e la tesi segue. Usiamo un argomento di confronto. Usando nell'ultimo passaggio le proprietà delle serie telescopiche, troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1} - a_k)| \le C \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = C a_1 < \infty.$$

Per togliere il valore assoluto abbiamo usato il fatto che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

$\square$

Da un esame della dimostrazione precendente è chiaro che il teorema 8.2 può avere la seguente più precisa riformulazione.

Teorema 8.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa infinitesima tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con le stesse proprietà del Teorema 8.2. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Un caso speciale del Teorema 8.2 è il Criterio di Leibniz.

Teorema 8.4 (Criterio di Leibniz). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente tale e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Dim. La tesi segue dal Teorema 8.2, infatti la successione $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big| \le 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Esempio 8.5. Per ogni numero reale $0 < \alpha \le 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

è convergente per il Criterio di Leibniz, in quanto la successione $a_n = 1/n^\alpha$ è decrescente ed infinitesima. La serie, tuttavia non è assolutamente convergente, come si deduce dal Criterio di condensazione di Cauchy.

ESEMPIO 8.6. Per $0 < \alpha \leq 1$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, studiamo la convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^\alpha}.$$

Per $\vartheta = 0$ la serie diverge. Studiamo il caso $0 < \vartheta < 2\pi$. Posto $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$, la successione delle somme parziali è

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\vartheta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta} - \mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}},$$

con formula ben definita per $\mathrm{e}^{i\vartheta} \neq 1$. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|B_n| = \left| \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta} - \mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}|} < \infty.$$

Per il Criterio di Abel-Dirichlet, la serie in esame converge per $\vartheta \in (0, 2\pi)$.

9. Riordinamenti di serie

Il valore (la somma) di una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dipende dall'ordine in cui si sommano gli infiniti addendi. In altri termini, per le somme infinite non vale la proprietà commutativa. Se tuttavia la serie converge assolutamente allora il valore della somma è indipendente dall'ordine della somma.

DEFINIZIONE 9.1 (Riordinamento). Una applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva si dice *riordinamento*.

TEOREMA 9.2. Sia $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie reale o complessa assolutamente convergente. Allora per ogni riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si ha

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

e la serie converge assolutamente.

DIM. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora definiamo il numero naturale $\bar{m} = \max\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(\bar{n})\}$. Allora se $m \geq \bar{m}$ si ha $m \geq \sigma^{-1}(i)$ per ogni $i = 1, ..., \bar{n}$, ovvero $\sigma^{-1}(i) \in \{1, ..., m\}$ per ogni $i = 1, ..., \bar{n}$, ovvero

$$\{1, \ldots, \bar{n}\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}.$$

Dunque, se $m \geq \bar{m}$ troviamo

$$\Big|s - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)}\Big| = \Big|s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k - \sum_{k=1, \sigma(k) \notin \{1,\dots,\bar{n}\}}^{m} a_{\sigma(k)}\Big| \leq \Big|s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k\Big| + \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Questo prova che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

Lo stesso argomento applicato alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ prova l'assoluta convergenza della serie riordinata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

□

Consideriamo ora una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e supponiamo che la seguente serie converga semplicemente ma non assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Questa è la condizione necessaria di convergenza.

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, dove $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$.

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$, dove $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$.

Che una delle due affermazioni ii) e iii) debba valere segue dal fatto che in caso contrario ci sarebbe convergenza assoluta. Se valesse solo una delle affermazioni ii) e iii), allora non potrebbe esserci convergenza semplice.

Teorema 9.3. Sia $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, il termine generale di una serie che converge semplicemente ma non assolutamente. Allora per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Dim. Definiamo il riordinamento σ in modo induttivo. Definiamo $\sigma(1) = 1$ e supponiamo che $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ siano stati definiti. Definiamo il numero naturale $\sigma(n+1)$ con il seguente criterio. Sia

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$$

e distinguiamo i due casi $L_n \geq L$ e $L_n < L$.

Se $L_n \geq L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \text{ e } a_m < 0\big\}.$$

Osserviamo che l'insieme dei naturali $m \in \mathbb{N}$ con le proprietà richieste è infinito per la condizione iii) vista sopra. Il minimo esiste per il buon ordinamento dei naturali.

Se $L_n < L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min \big\{ m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \text{ e } a_m \geq 0 \big\}.$$

Il minimo m con le proprietà richieste esiste per la condizione ii).

L'applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita è iniettiva. Dalle condizioni ii) e iii) segue anche che σ è suriettiva.

Proviamo che $\lim_{n\to\infty} L_n = L$. Fissato $\varepsilon > 0$, per la i) esiste $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Inoltre per la ii) si può anche supporre che $L_{\bar{m}} > L - \varepsilon$. Segue che $L_n > L - \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Per la iii) esiste $\bar{n} \geq \bar{m}$ tale che $L_{\bar{n}} \leq L$, e dunque $L_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Questo termina la dimostrazione. □

10. Criterio del confronto asintotico

Teorema 10.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse tali che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esista finito e non zero il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e solo se converge assolutamente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dim. Dalla disuguaglianza $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$ per numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = |L| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dunque, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$

$$\frac{|L|}{2}|a_n| \leq |b_n| \leq 2|L||a_n|.$$

Per il Teorema del confronto, la tesi segue allora dalle disuguaglianze

$$\frac{|L|}{2}\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |b_n| \leq 2|L| \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n|.$$

□

Osservazione 10.2. Il teorema precedente non vale se alle parole "convergenza assoluta" si sostituiscono le parole "convergenza semplice". Si considerino, infatti, le successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \neq 0.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge semplicemente, per il Criterio di Leibniz. Tuttavia la serie con termine generale a_n non converge semplicemente, infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty.$$

Esempio 10.3. Al variare di $\alpha > 0$ studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{\sin(1/n^\alpha)}{1/n^\alpha} = 1 \neq 0.$$

Quindi, la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}},$$

ovvero se e solo se $\alpha > 1/2$.

11. Convergenza di successioni uniforme rispetto ad un parametro

Sia Λ un insieme e indichiamo con $\lambda \in \Lambda$ i suoi elementi. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ sia data una successione reale o complessa $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo una funzione $a_n : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$). Supponiamo che la successione $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ *converga puntualmente*, supponiamo cioè che per ogni $\lambda \in \Lambda$ esista un numero $L(\lambda) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\lambda) = L(\lambda).$$

Il valore limite è in effetti una funzione $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$).

Definizione 11.1 (Convergenza uniforme). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente rispetto al parametro* $\lambda \in \Lambda$ se esiste una funzione $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} |a_n(\lambda) - L(\lambda)| = 0.$$

Equivalentemente, la successione converge uniformemente se esiste una funzione $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - L(\lambda)| < \varepsilon.$$

L'indice $\bar{n}$ dipende in generale da ε ma *deve essere indipendente* da λ.

Si confronti la definizione di convergenza uniforme con la nozione, più debole, di convergenza puntuale:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \lambda \in \Lambda \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - L(\lambda)| < \varepsilon.$$

In questo caso, l'indice $\bar{n}$ può dipendere anche da $\lambda \in \Lambda$.

La convergenza uniforme è importante perchè conserva nel passaggio al limite la proprietà di continuità. Questi concetti verranno ripresi nei corsi di Analisi del secondo anno.

Teorema 11.2. Una successione reale o complessa $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente rispetto al parametro $\lambda \in \Lambda$ se e solo se è di Cauchy *uniformemementre su* Λ, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall n, m \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - a_m(\lambda)| < \varepsilon. \tag{11.18}$$

Dim. Proviamo la parte non banale (e interessante) del teorema. Supponiamo cioè che valga l'affermazione (11.18) e proviamo che c'è convergenza uniforme. Se vale (11.18), allora per ogni $\lambda \in \Lambda$ (fissato) la successione $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e quindi converge ad un valore limite $L(\lambda) \in \mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Facendo tendere ora $m \to \infty$ nella (11.18) si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - L(\lambda)| < \varepsilon.$$

Questo prova la convergenza uniforme.

L'implicazione opposta del teorema segue dalla disuguaglianza triangolare. Omettiamo i facili dettagli. □

Esempio 11.3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1].$$

Il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme sull'intervallo $[0,1]$. Infatti, si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1,$$

e questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0,$$

e non c'è convergenza uniforme.

La convergenza è tuttavia uniforme su ogni intervallo della forma $[0,\delta]$ con $0 \leq \delta < 1$. Infatti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\delta]} x^n = \lim_{n\to\infty} \delta^n = 0.$$

Evidentemente, la convergenza puntuale di una successione di funzioni implica quella uniforme. L'esempio precedente mostra che il viceversa non vale.

12. Serie di funzioni. Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ oppure di $\mathbb{C}$. Più in generale potremmo supporre che $A = \Lambda$ sia un insieme di parametri arbitrario. Sia poi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi su A, ovvero $f_n : A \to \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Introduciamo la successione delle somme parziali $s_n = f_1 + \ldots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ovviamente, $s_n : A \to \mathbb{R}$ sono ancora funzioni.

Definizione 12.1 (Convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali definite su un insieme A. Diciamo che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge puntualmente su A se per ogni $x \in A$ converge la successione $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali.

Diciamo che la serie di funzioni *converge uniformemente su* A se converge uniformemente su A la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 12.2 (Criterio di Weierstrass). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi su un insieme A. Se esiste una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\sup_{x\in A} |f_n(x)| \le a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

allora la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su A.

Dim. La successione delle somme parziali relative alla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \ge \bar{n}$ con $m \ge n$ si ha $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} a_k \le \varepsilon$. Dalle ipotesi del teorema segue che

$$\sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \Big| \le \sup_{x\in A} \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^{m} \sup_{x\in A} |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^{m} a_k \le \varepsilon.$$

Dunque, la successione delle somme parziali relativa alla successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy uniformemente su A. Dal Teorema 11.2 segue che la serie di funzioni converge uniformemente su A.

□

Talvolta si dice che una serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge totalmente su* A se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| < \infty.$$

Il teorema precedente dice allora che la convergenza totale su A implica la convergenza uniforme su A. Il viceversa, tuttavia, non vale. Vedremo dei controesempi in seguito.

Esempio 12.3. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco complesso unitario e consideriamo la serie di funzioni su A

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = s(z).$$

Sappiamo che la serie converge puntualmente su A. Vediamo se c'è convergenza uniforme su A. Le somme parziali sono

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e la differenza con la somma limite è

$$|s_n(z) - s(z)| = \Big|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\Big| = \Big|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\Big| = \Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big|,$$

e quindi

$$\sup_{z\in A}\Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big| = \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

e dunque non c'è convergenza uniforme su A. Tuttavia, c'è convergenza uniforme su ogni insieme della forma $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \delta\}$ con $0 \le \delta < 1$. Infatti si ha

$$\sup_{z\in A_\delta} |z|^n \le \delta^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty.$$

L'affermazione segue dal Criterio di Weierstrass.

13. Criteri di Abel–Dirichlet

Questa sezione non è nel programma del corso, ad eccezione dell'enunciato del Teorema 13.3. Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 13.1 (Somma per parti II). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Per $1 \le M \le N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 13.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$ che verifica:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in A}|f_n(x)|\le C<\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in A}\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\infty.$$

Allora la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su A.

Dim. Poniamo $A_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n=0$. Dati $n,p\in\mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x)=A_n f_{n-1}(x)-A_{n+p+1}f_{n+p}(x)+\sum_{k=n}^{n+p}A_k(f_k(x)-f_{k-1}(x)).$$

Fissato $\varepsilon>0$ esiste $\bar n\in\mathbb{N}$ tale che per $n\ge\bar n$ si ha $|A_n|\le\varepsilon$ e quindi per $p\in\mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in A}\Big|\sum_{k=n}^{n+p}a_k f_k(x)\Big|\le\varepsilon\Big(2C+\sup_{x\in A}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\Big).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su A, la serie converge uniformemente su A. □

Possiamo ora enunciare i criteri di Abel sulla convergenza uniforme.

Teorema 13.3 (Criterio di Abel I). Se la serie di potenze complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge nel punto $z_0\in\mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0,z_0]=\{tz_0\in\mathbb{C}:0\le t\le 1\}$.

Dim. Per $x\in[0,1]$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_0^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_0^n f_n(x), \qquad f_n(x)=x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x)=x^n$ è uniformemente limitata su $[0,1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\begin{cases}1 & \text{se } x\in[0,1)\\ 0 & \text{se } x=1.\end{cases}$$

La convergenza uniforme segue dal Teorema 13.2. □

Fissati $\vartheta\in[0,\pi/2)$ e $r_0>0$ definiamo il cono troncato con vertice nel punto 1

$$C(\vartheta,1,r_0)=\{z=1+re^{i\varphi}\in\mathbb{C}:\varphi\in[\pi-\vartheta,\pi+\vartheta],\ 0\le r\le r_0\}.$$

Teorema 13.4 (Criterio di Abel II). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga. Per ogni $\vartheta \in [0,\pi/2)$ esiste $r_0 > 0$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente su $C(\vartheta,1,r_0)$.

Dim. Fissiamo $r_0 > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che $C(\vartheta,1,r_0)\cap\{|z| = 1\} = \{1\}$. Mostriamo che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ verifica le condizioni del Teorema 13.2. In primo luogo $|f_n(z)| \leq 1$ su $C(\vartheta,1,r_0) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Inoltre, per $z = 1 + re^{i\varphi} \in C(\vartheta,1,r_0)$ si ha

$$|z^{n+1} - z^n| = |z|^n|z-1| = r|1+re^{i\varphi}|^n,$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| = r\frac{1}{1-|1+re^{i\varphi}|} = r\frac{1+|1+re^{i\varphi}|}{1-|1+re^{i\varphi}|^2} = \frac{1+|1+re^{i\varphi}|}{-r-2\cos\varphi}.$$

Se $\varphi \in [\pi-\vartheta,\pi+\vartheta]$ allora $-2\cos\varphi \geq 2\cos\vartheta > 0$, e scegliendo $r_0 < 2\cos\vartheta$ si trova

$$\sup_{z\in C(\vartheta,1,r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| < \infty.$$

□

14. Serie di potenze

In questa sezione studiamo le serie di potenze in campo complesso.

Definizione 14.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa. Una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

si dice *serie di potenze complessa* (centrata in 0).

Teorema 14.2 (Criterio di Cauchy–Hadamard). Data la serie di potenze complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sia $R \in [0,\infty]$ il numero reale (eventualmente ∞) definito dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora:

i) La serie di potenze converge assolutamente in ogni punto $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.
ii) La serie di potenze converge uniformemente su ogni insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ con $\delta < R$.
iii) La serie non converge nei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| > R$.

Il numero R si dice *raggio di convergenza* della serie di potenze.

DIM. Studiamo la convergenza assoluta della serie con il Criterio della radice. Sia

$$L(z) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \frac{|z|}{R}.$$

Se $|z| < R$ allora $L(z) < 1$ e la serie converge assolutamente nel punto z. Se $|z| > R$ allora $L(z) > 1$ e la serie non converge assolutamente. Il termine generale non è infinitesimo, e dunque in effetti la serie non converge nemmeno semplicemente.

Sia ora $0 \le \delta < R$. Allora si ha:

$$\sup_{z\in A_\delta} |a_n z^n| = |a_n|\delta^n, \quad \text{e inoltre} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\delta^n < \infty.$$

Che l'ultima serie converga, si vede di nuovo col Crierio della radice, usando il fatto che $\delta < R$.

La serie di potenze converge dunque totalmente su A_δ e per il Criterio di Weierstrass converge anche uniformemente su A_δ.

□

Sulla frontiera del cerchio di convergenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, ovvero nei punti in cui $|z| = R$ la serie di potenze può sia convergere che non convergere.

15. Funzioni exp, cos e sin in campo complesso

Definiamo le tre funzioni $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tramite le seguenti serie di potenze complesse:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Scriveremo anche $\exp(z) = e^z$. È facile verificare che il raggio di convergenza delle tre serie è $R = \infty$. Proviamo ad esempio che la prima serie converge assolutamente in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ con il criterio del rapporto. È sufficiente considerare il caso $z \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Quando $z = x \in \mathbb{R}$ la definizione di $\exp(x)$ coincide con quella data nel Capitolo 3, Sezione 5. Questo segue dal Teorema 5.1.

TEOREMA 15.1. La funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\exp(z + \zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ per ogni $z, \zeta \in \mathbb{C}$;
2) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
3) $|\exp(ix)| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4) $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (formule di Eulero).

Dim. 1) Tronchiamo la serie che definisce $\exp(z+\zeta)$ fino ad un $N\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{n=0}^N \frac{(z+\zeta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k\zeta^{n-k} = \sum_{n=0}^N\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!}.$$
Abbiamo usato la formula per il binomio di Newton. Scambiando l'ordine di sommatoria, si ottiene
$$\sum_{n=0}^N\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^N\sum_{n=k}^N \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^N\sum_{n=0}^{N-k} \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^n}{n!}.$$
Formiamo infine la differenza
$$\Delta_N = \Big|\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^n}{n!} - \sum_{k=0}^N\sum_{n=0}^{N-k}\frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^n}{n!}\Big|.$$
Nostro obiettivo è di provare che fissato $\varepsilon>0$ esiste $\bar N\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $N\geq\bar N$ si abbia $\Delta_N<\varepsilon$. Maggioriamo Δ_N nel seguente modo:
$$\begin{aligned}\Delta_N &= \Big|\sum_{k=0}^N\sum_{n=0}^\infty\ldots+\sum_{k=N+1}^\infty\sum_{n=0}^\infty\ldots-\sum_{k=0}^N\sum_{n=0}^{N-k}\ldots\Big|\\ &= \Big|\sum_{k=0}^N\sum_{n=N-k+1}^\infty\ldots+\sum_{k=N+1}^\infty\sum_{n=0}^\infty\ldots\Big|\\ &\leq \sum_{k=0}^N\sum_{n=N-k+1}^\infty\big|\ldots\big|+\sum_{k=N+1}^\infty\sum_{n=0}^\infty\big|\ldots\big| = A_N+B_N.\end{aligned}$$
Iniziamo a stimare B_N. Esiste $\bar N_1\in\mathbb{N}$ tale che per $N\geq\bar N_1$ si ha:
$$B_N = \sum_{k=N+1}^\infty\frac{|z|^k}{k!}\sum_{n=0}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|\zeta|}\sum_{k=N+1}^\infty\frac{|z|^k}{k!}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Esaminiamo A_N. Sia $M<N$ un numero naturale da fissare in modo opportuno. Avremo
$$A_N = \sum_{k=0}^M\frac{|z|^k}{k!}\sum_{n=N-k+1}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!}+\sum_{k=M+1}^N\frac{|z|^k}{k!}\sum_{n=N-k+1}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!}$$
Siccome la successione $N\mapsto\sum_{k=0}^N\frac{|z|^k}{k!}$ è di Cauchy, esiste $\bar N_2\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $N>M\geq\bar N_2$ si ha
$$\sum_{k=M+1}^N\frac{|z|^k}{k!}\sum_{n=N-k+1}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!}\leq\mathrm{e}^{|\zeta|}\sum_{k=M+1}^N\frac{|z|^k}{k!}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

A questo punto M è stato fissato, ad esempio $M=\bar N_2$. Stimiamo il primo addendo di A_N. Se $k\leq M$ allora $N-k+1\geq N-M+1$. Quindi esiste $\bar N_3\in\mathbb{N}$ tale che per $N\geq\bar N_3$ si ha
$$\sum_{k=0}^M\frac{|z|^k}{k!}\sum_{n=N-k+1}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!}\leq\sum_{k=0}^M\frac{|z|^k}{k!}\sum_{n=N-M+1}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!}\leq\mathrm{e}^{|z|}\sum_{n=N-M+1}^\infty\frac{|\zeta|^n}{n!}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Con la scelta $\bar{N} = \max\{\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3\}$ si ottiene la tesi.

2) Questa affermazione segue direttamente dalla definizione:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

3) Sia ora $x \in \mathbb{R}$. Usando le proprietà 2) e 1) si ottiene la tesi:

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1.$$

4) Sia di nuovo $x \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x).\end{aligned}$$

□

Dalle affermazioni 3) e 4) risulta ora analiticamente provata l'identità $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

CHAPTER 5

Spazi metrici

1. Definizioni ed esempi

Richiamiamo dal Capitolo 2, Sezione 4, la definizione di *spazio metrico*.

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio metrico). Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Conosciamo già i seguenti esempi di spazi metrici:

1) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico. $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, è pure uno spazio
2) $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$, è uno spazio metrico.
3) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la funzione distanza
$$d(x, y) = |x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$
è uno spazio metrico.

Ecco altri esempi di spazi metrici.

ESEMPIO 1.2 (Spazio metrico discreto). Sia X un insieme e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$
È facile verificare che d verifica gli assiomi della funzione distanza.

ESEMPIO 1.3 (Distanza centralista). Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ nel seguente modo
$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ sono collineari con } 0, \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Lasciamo come esercizio il compito di provare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico.

ESEMPIO 1.4. I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ con la distanza
$$d(m, n) = \Big|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\Big|, \quad m, n \in \mathbb{N},$$
sono uno spazio metrico.

Se X è uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$ e $Y \subset X$ è un suo sottoinsieme, allora anche (Y, d) è uno spazio metrico, dove ora $d : Y \times Y \to [0, \infty)$ è la restrizione della distanza precedente. Spazi metrici possono essere generati a partire dagli spazi normati.

Definizione 1.5 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \| \cdot \|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:
1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadittività o disuguaglianza triangolare).

Chiaramente, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono spazi normati con le norme naturali. Una norma $\| \cdot \|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadittività della norma $\| \cdot \|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Esempio 1.6 (Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$). Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di quadrato sommabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R})$ un generico elemento di $\ell^2(\mathbb{R})$. La funzione $\| \cdot \|_{\ell^2(\mathbb{R})} : \ell^2(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Big)^{1/2}$$

è una norma. La proprietà di subadittività si prova come in $\mathbb{R}^n$. Definiamo su $\ell^2(\mathbb{R})$ il prodotto scalare

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \mathrm{x} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \mathrm{y} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

La disuguaglianza $2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$ prova che la serie converge assolutamente. In particolare, avremo $\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}^{1/2}$. Esattamente lo stesso argomento della Proposizione 5 nella Sezione 5 del Capitolo 2 prova che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}| \leq \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})},$$

e da qui segue che $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

In conclusione, $\ell^2(\mathbb{R})$ con la funzione distanza

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2 \Big)^{1/2}$$

è uno spazio metrico.

2. Successioni in uno spazio metrico. Spazi metrici completi

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 2.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \quad \text{ovvero} \quad \forall\varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

In questo caso si scrive

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in } (X, d),$$

e si dice che la successione è *convergente* ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

Esempio 2.2 (Successioni in $\mathbb{R}^m$). Sia $X = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, con la distanza Euclidea e consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$. Ogni punto $x_n \in \mathbb{R}^m$ ha m coordinate, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$ con $x_n^1, \dots, x_n^m \in \mathbb{R}$. Sia infinr $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}6M$ un punto fissato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}^m$;
(B) $\lim_{n\to\infty} x_n^i = x^i$ in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

3. Funzioni continue fra spazi metrici

Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, ricordiamo che l'insieme

$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r.

Definizione 3.1 (Funzione continua). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Equivalentemente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

La funzione si dice *continua su* X se è continua in tutti i punti di X.

Negli spazi metrici, la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

Teorema 3.2 (Prima caratterizzazione della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0 (nel senso della definizione $\varepsilon - \delta$);

B) f è sequenzialmente continua in x_0. Ovvero, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ in } Y.$$

Dim. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità di f segue l'esistenza di $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ si ottiene $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che f non sia continua in $x_0 \in X$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un punto $x_n \in X$ tale che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_0 ma la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad $f(x_0)$ in (Y, d_Y). Questo contraddice l'affermazione B). □

4. Funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^m$

4.1. Funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

Teorema 4.1 (Operazioni sulle funzioni continue). Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dim. La dimostrazione segue dal Teorema 3.2 sulla caratterizzazione sequenziale della continuità e dal Teorema 1.8 sulle operazioni elementari con le successioni numeriche. □

Esempio 4.2 (Funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$). Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. La funzione identità $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ (la definizione $\varepsilon - \delta$ è verificata con $\delta = \varepsilon$). Dal Teorema 4.1 seguono i seguenti fatti:

i) Ogni polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continuo su tutto $\mathbb{R}$.
ii) Siano $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomi e sia $A = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Allora la funzione razionale $f : A \to \mathbb{R}$, $f = p/q$, è continua su A.

Le serie di potenze reali definisco funzioni continue.

Teorema 4.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e si consideri la serie di potenze nella variabile $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Sia $R > 0$ il raggio di convergenza della serie. Allora la funzione $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ è continua sull'intervallo $(-R, R)$.

Questo teorema verrà provato nella parte B del corso. Il Teorema vale anche per le serie complesse. In particolare, exp, sin e cos sono funzioni continue su $\mathbb{R}$.

La funzione valore assoluto, $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Questo segue dalla disuguaglianza $||x| - |y|| \leq |x - y|$ che permette di verificare la definizione $\varepsilon - \delta$ di continuità scegliendo $\delta = \varepsilon$.

Esercizio 4.1. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\alpha$ è continua su $\mathbb{R}$.