

Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2011-2012

Roberto Monti

Versione del 18 Ottobre 2011

Contents

Chapter 1. Cardinalità	5
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale	5
2. Cardinalità	7
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili	9
4. Numeri naturali e induzione	11
5. Esercizi vari	13
Chapter 2. Numeri reali	15
1. Relazioni d'ordine	15
2. Introduzione assiomatica dei numeri reali	15
3. Esercizi vari	19

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di “insieme”. Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato “insieme ambiente”, che indicheremo con X . Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l’inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo \subset viene talvolta indicato con \subseteq . Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L’unione e l’intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}. \end{aligned}$$

L’insieme che non contiene alcun elemento, l’insieme vuoto, si indica con \emptyset . Due insiemi A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi “ A meno B ”) è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l’insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c . Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B', \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'. \end{aligned}$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l’unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\}, \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

Le formule di De Morgan sono

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda, \quad X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \rightarrow B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Il *grafico* di una funzione $f : A \rightarrow B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}.$$

OSSERVAZIONE 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A \times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \text{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \rightarrow B$ per indicare una funzione.

DEFINIZIONE 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \{f(x) \in B : x \in C\} \\ &= \{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f .

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D rispetto ad f .

PROPOSIZIONE 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), & f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), & f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
 \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 1.4. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice:

- i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
- ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
- iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$\begin{aligned}
 f : A \xrightarrow{1-1} B &\text{ funzione iniettiva,} \\
 f : A \xrightarrow{\text{su}} B &\text{ funzione suriettiva,} \\
 f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B &\text{ funzione iniettiva e suriettiva.}
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.5 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \rightarrow f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \rightarrow D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$\begin{aligned}
 f^{-1} \circ f &= \text{identità su } A, \\
 f \circ f^{-1} &= \text{identità su } B.
 \end{aligned}$$

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

DEFINIZIONE 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

- i) $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \rightarrow B$;
- ii) $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \rightarrow B$;
- iii) $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$ se $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \rightarrow B$.

Se $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile, e cioè vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$ oppure $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$, oppure $\text{Card}(B) < \text{Card}(A)$. Non dimostreremo questo teorema la cui prova richiede l'assioma della scelta.

Proveremo invece che l'affermazione $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \rightarrow B$ e di una funzione iniettiva $g : B \rightarrow A$. Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A :

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento \emptyset .

TEOREMA 2.2 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \rightarrow B$.

DIM. Consideriamo preliminarmente una funzione $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$(2.2) \quad E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F).$$

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando la proprietà (1.1) e la (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\left(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\right) = T(F).$$

D'altra parte, applicando all'inclusione $F \subset T(F)$ nuovamente T si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva l'ordine. Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \rightarrow B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \rightarrow A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \rightarrow B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

PROPOSIZIONE 2.3. Per ogni insieme A risulta $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$.

DIM. Certamente $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul “paradosso di Russell”. Si consideri l’insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:

Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.

Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l’insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\text{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\text{Card}(A) = \infty$.

Enunciamo senza provare il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \rightarrow A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1) f è iniettiva;
- 2) f è suriettiva;
- 3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio.

ESEMPIO 3.2. L’insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$ è infinito ed è equipotente con \mathbb{N} . Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

DEFINIZIONE 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Diremo in questo caso che:

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (\text{Alef zero}).$$

Il cardinale \aleph_0 è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. La costruzione di f è induttiva:

- i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

3. \mathbb{Z} è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.2 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia infatti, $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. \mathbb{Q} è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da \mathbb{N} in \mathbb{Q} . Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.4. Siano A_n , $n \in \mathbb{N}$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P :

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \Leftrightarrow p_n^j = p_m^k \Leftrightarrow n = m, j = k \Leftrightarrow a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

8. \mathbb{R} non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

- i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se \mathbb{N} inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
- ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(4.3) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(4.4) \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

- i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
- ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi vari

ESERCIZIO 5.1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

- 1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f , ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
- 2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
- 3) Dire se f è iniettiva.
- 4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

ESERCIZIO 5.2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la seguente disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2} \left(tx^2 + \frac{1}{t}y^2 \right).$$

ESERCIZIO 5.3. Verificare che $\log_{10}^2 \notin \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 5.4. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \rightarrow D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

- 1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
- 2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \rightarrow D$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine (totale) e relazione d'ordine parziale.

DEFINIZIONE 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che a è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy .

DEFINIZIONE 1.2 (Ordine totale). Una relazione \leq su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

- i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
- ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
- iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
- iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Se si lascia cadere ii) si ottiene una relazione di *ordine parziale*.

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

DEFINIZIONE 2.1. I numeri reali sono un insieme \mathbb{R} munito di due operazioni $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale \leq che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

- (S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
- (S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
- (S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
- (S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

- (P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
- (P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
- (P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
- (P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

$$(D) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Assiomi dell'ordine:

- (O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) definiscono un *campo*. Aggiungendo gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*. Aggiungendo l'assioma di completezza si ottiene un *campo ordinato completo*. Gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sono in modo naturale sottoinsiemi di \mathbb{R} .

I numeri razionali \mathbb{Q} con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato.

PROPOSIZIONE 2.2. I numeri complessi \mathbb{C} sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

DIM. Per provare questa affermazione si osservi che in campo ordinato ogni elemento x verifica $x^2 \geq 0$ (vedi l'Esercizio ??). Supponiamo per assurdo che ci sia su \mathbb{C} una relazione d'ordine totale \geq . L'unità immaginaria i dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. \square

L'assioma di completezza può essere formulato in vari modi equivalenti fra loro. Elenchiamo cinque affermazioni che sono equivalenti:

- 1) Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di \mathbb{R} ha estremo superiore.
- 2) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato di \mathbb{R} ha estremo inferiore.
- 3) Ogni sezione di \mathbb{R} ha un unico elemento separatore.
- 4) Ogni successione monotona e limitata in \mathbb{R} è convergente.
- 5) Ogni successione di Cauchy in \mathbb{R} è convergente

Ritourneremo su questi concetti durante il corso.

DEFINIZIONE 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di \mathbb{R} .

- i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
- ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
- iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo

$$\sup A = x.$$

- iv) Se A non è superiormente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

- v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

- i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$;
- ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

DEFINIZIONE 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di \mathbb{R} .

- i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
- ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
- iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo

$$\inf A = x.$$

- iv) Se A non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

- v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

2.1. Conseguenze della completezza.

PROPOSIZIONE 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

DIM. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

è superiormente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

- 1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero \bar{x} è un maggiorante di A ;
- 2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero \bar{x} è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corrispondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

DEFINIZIONE 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$

Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x

è un sottoinsieme di \mathbb{Z} questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera* di x

$$[x] = \max \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x . La *parte frazionaria* di x è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali \mathbb{Q} sono densi in \mathbb{R} .

PROPOSIZIONE 2.7 (Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \leq y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \leq y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi. □

2.2. Costruzione di \mathbb{R} con le sezioni di \mathbb{Q} . La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema. Nel seguito verrà illustrata una costruzione puramente metrica di \mathbb{R} , che prescinde dalla relazione d'ordine.

DEFINIZIONE 2.8. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

- (i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in \mathbb{Q} ;
- (ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \leq a$;
- (iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

Indichiamo con \mathcal{A} l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \leq B$ se $A \subset B$. L'insieme \mathcal{A} è totalmente ordinato dalla relazione \leq .

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A \neq 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A\}$.

Con pazienti verifiche si controlla che \mathcal{A} è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

TEOREMA 2.9. L'insieme \mathcal{A} con le operazioni $+$ e \cdot e con la relazione d'ordine \leq è un campo ordinato *completo*.

DIM. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superiormente limitato (non vuoto). Questo significa che esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni insieme $B \in \mathcal{B}$. L'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

è una sezione. Infatti, $C \neq \emptyset$ e $C' \neq \emptyset$, in quanto $C \cap A' = \emptyset$. Inoltre, se $x \in C$ e $y \leq x$, allora $x \in B$ per qualche $B \in \mathcal{B}$, e dunque $y \in B \subset C$. Infine, se $x \in B$ esiste $y > x$ tale che $y \in B \subset C$.

Mostriamo che C è l'estremo superiore di \mathcal{B} . Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$. Supponiamo che sia $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$ e per qualche sezione $D \in \mathcal{A}$. Se $x \in C$, allora $x \in B$ per qualche $B \in \mathcal{B}$ e dunque $x \in D$. Segue che $C \subset D$. \square

3. Esercizi vari

ESERCIZIO 3.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \right\}.$$

- 1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
- 2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 3.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{ n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

- 1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
- 2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 3.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.