

# Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2011-2012

Roberto Monti

Versione del 26 Ottobre 2011



## Contents

Chapter 1. Cardinalità	5
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale	5
2. Cardinalità	7
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili	9
4. Numeri naturali e induzione	11
5. Esercizi vari	13
Chapter 2. Numeri reali	15
1. Relazioni d'ordine	15
2. Introduzione assiomatica dei numeri reali	15
3. Esercizi vari	19
4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico	20
5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico	21
Chapter 3. Successioni reali e complesse	25
1. Successioni numeriche	25



## Cardinalità

### 1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

**1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi.** Non diamo una definizione di “insieme”. Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato “insieme ambiente”, che indicheremo con  $X$ . Se un elemento  $x$  di  $X$  appartiene ad un insieme  $A$  scriveremo  $x \in A$ . Se  $x$  non appartiene ad  $A$  scriveremo  $x \notin A$ . Con  $A \subset B$  si intende l’inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo  $\subset$  viene talvolta indicato con  $\subseteq$ . Se  $A \subset B$  e  $B \subset A$  gli insiemi  $A$  e  $B$  contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali,  $A = B$ .

L’unione e l’intersezione di due insiemi  $A$  e  $B$  si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}. \end{aligned}$$

L’insieme che non contiene alcun elemento, l’insieme vuoto, si indica con  $\emptyset$ . Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono disgiunti se  $A \cap B = \emptyset$ .

La differenza di insiemi  $A \setminus B$  (leggi “ $A$  meno  $B$ ”) è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Talvolta la differenza  $A \setminus B$  è indicata con  $A - B$ .

Il complementare di un insieme  $A$  in  $X$  è l’insieme  $A' = X \setminus A$ . Talvolta il complementare è indicato con  $A^c$ . Con tale notazione si ha  $A \setminus B = A \cap B'$ . Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B', \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'. \end{aligned}$$

Più in generale, sia  $\Lambda$  una famiglia di indici e siano  $A_\lambda$  insiemi indicizzati da  $\lambda \in \Lambda$ . Allora l’unione e intersezione della famiglia  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sono:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\}, \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

Le formule di De Morgan sono

$$\left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda, \quad X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

**1.2. Funzioni fra insiemi.** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$  è un'applicazione che associa ad ogni elemento  $x \in A$  un elemento  $f(x) \in B$ . L'insieme  $A$  si dice *dominio* e l'insieme  $B$  si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi  $A$  e  $B$  è l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Il *grafico* di una funzione  $f : A \rightarrow B$  è il seguente sottoinsieme di  $A \times B$ :

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}.$$

**OSSERVAZIONE 1.1.** La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da  $A$  a  $B$*  è una terna ordinata  $(A, B, G)$  dove  $G \subset A \times B$  è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni  $x \in A$  esiste un unico  $y \in B$  tale che  $(x, y) \in G$ . L'insieme  $G = \text{gr}(f)$  è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione  $f : A \rightarrow B$  per indicare una funzione.

**DEFINIZIONE 1.2** (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme  $C \subset A$ , l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \{f(x) \in B : x \in C\} \\ &= \{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di  $C$  rispetto ad  $f$ .

Dato un insieme  $D \subset B$ , l'insieme

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di  $D$  rispetto ad  $f$ .

**PROPOSIZIONE 1.3.** Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano  $A_\lambda \subset A$  e  $B_\lambda \subset B$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Allora si ha:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), & f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), & f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

**DIM.** Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
 \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 1.4. Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice:

- i) *iniettiva* (1-1) se  $f(x) = f(y)$  implica  $x = y$  (equivalentemente se  $x \neq y$  implica  $f(x) \neq f(y)$ );
- ii) *suriettiva* (su) se per ogni  $y \in B$  esiste  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ ;
- iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$\begin{aligned}
 f : A \xrightarrow{1-1} B &\text{ funzione iniettiva,} \\
 f : A \xrightarrow{\text{su}} B &\text{ funzione suriettiva,} \\
 f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B &\text{ funzione iniettiva e suriettiva.}
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.5 (Funzione inversa e composta). Se  $f : A \rightarrow B$  è una funzione iniettiva, allora  $f : A \rightarrow f(A)$  è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa*  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  due funzioni tali che  $f(A) \subset C$ . Allora è ben definita la *funzione composta*  $g \circ f : A \rightarrow D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se  $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$  allora si ha:

$$\begin{aligned}
 f^{-1} \circ f &= \text{identità su } A, \\
 f \circ f^{-1} &= \text{identità su } B.
 \end{aligned}$$

## 2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

DEFINIZIONE 2.1. Siano  $A$  e  $B$  insiemi. Diremo che:

- i)  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  se esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$ ;
- ii)  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  se esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $f : A \rightarrow B$ ;
- iii)  $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$  se  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  ma non esiste alcuna funzione suriettiva  $f : A \rightarrow B$ .

Se  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  diremo che gli insiemi  $A$  e  $B$  sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile, e cioè vale sempre una delle seguenti tre possibilità:  $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$  oppure  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ , oppure  $\text{Card}(B) < \text{Card}(A)$ . Non dimostreremo questo teorema la cui prova richiede l'assioma della scelta.

Proveremo invece che l'affermazione  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  equivale all'esistenza di una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$  e di una funzione iniettiva  $g : B \rightarrow A$ . Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme  $A$  è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme  $\mathcal{P}(A)$  contiene sempre l'elemento  $\emptyset$ .

**TEOREMA 2.2** (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano  $A$  e  $B$  due insiemi, e siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $h : A \rightarrow B$ .

**DIM.** Consideriamo preliminarmente una funzione  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  che preserva le inclusioni:

$$(2.2) \quad E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F).$$

Si consideri la famiglia di insiemi  $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\}$ . È certamente  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  in quanto  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che  $T(F) = F$ . Infatti, usando la proprietà (1.1) e la (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\left(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\right) = T(F).$$

D'altra parte, applicando all'inclusione  $F \subset T(F)$  nuovamente  $T$  si ottiene  $T(F) \subset T(T(F))$  e quindi  $T(F) \in \mathcal{A}$ , da cui segue l'inclusione opposta  $T(F) \subset F$ .

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che  $T$  preserva l'ordine. Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso  $A_1 \in \mathcal{P}(A)$  di  $T$  ovvero un insieme tale che  $T(A_1) = A_1$ . Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente  $A = A_1 \cup A_2$  e  $B = B_1 \cup B_2$  con unioni disgiunte. La funzione  $f : A_1 \rightarrow B_1$  è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che  $g(B_2) = A_2$ . Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque,  $g : B_2 \rightarrow A_2$  è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva  $h : A \rightarrow B$  nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$



□

PROPOSIZIONE 2.3. Per ogni insieme  $A$  risulta  $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$ .

DIM. Certamente  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$  in quanto la funzione  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ,  $f(x) = \{x\}$  è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ . La dimostrazione si basa sul “paradosso di Russell”. Si consideri l’insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè  $f$  è suriettiva, esiste  $x_0 \in A$  tale che  $f(x_0) = A_0$ . Ci sono due casi:

Caso 1:  $x_0 \in A_0$ . Allora:  $x_0 \notin f(x_0) = A_0$ , assurdo.

Caso 2:  $x_0 \notin A_0$ . Allora:  $x_0 \in f(x_0) = A_0$ , assurdo.

□

### 3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l’insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$  per escludere lo 0.

**1. Insieme finito.** Un insieme  $A$  si dice *finito* se esistono  $n \in \mathbb{N}$  ed una funzione  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che  $\text{Card}(A) = n$ . Se  $A$  non è finito, diremo che  $A$  è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo  $\text{Card}(A) = \infty$ .

Enunciamo senza provare il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 3.1. Se  $A$  è un insieme finito ed  $f : A \rightarrow A$  è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1)  $f$  è iniettiva;
- 2)  $f$  è suriettiva;
- 3)  $f$  è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio.

ESEMPIO 3.2. L’insieme dei numeri pari  $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$  è infinito ed è equipotente con  $\mathbb{N}$ . Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$  è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

DEFINIZIONE 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

**2. Insieme numerabile.** Un insieme  $A$  si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Diremo in questo caso che:

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (\text{Alef zero}).$$

Il cardinale  $\aleph_0$  è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se  $A$  è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . La costruzione di  $f$  è induttiva:

- i) Se definisce  $f(0) \in A$  a piacere;

ii) Definiti  $f(1), \dots, f(n) \in A$  distinti, si osserva che l'insieme  $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$  non è vuoto, altrimenti  $A$  sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento  $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ . Ne risulta una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile  $A$  possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

**3.  $\mathbb{Z}$  è numerabile.** L'insieme  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

**4.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile.** Proviamo che il prodotto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile, ovvero che

$$\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $f(n) = (n, 1)$  è iniettiva. D'altra parte, la funzione  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(n, m) = 2^n 3^m$  è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.2 esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

ESERCIZIO 3.1. Controllare che la funzione  $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

**5.  $A \times A$  è numerabile se  $A$  è numerabile.** Se  $A$  è numerabile, anche il prodotto cartesiano  $A \times A$  è numerabile. Sia infatti,  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva e suriettiva. Allora  $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ ,  $F(n, m) = (f(n), f(m))$  è iniettiva e suriettiva. La composizione  $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$  è allora iniettiva e suriettiva. Qui  $h$  è la funzione definita sopra.

**6.  $\mathbb{Q}$  è numerabile.** L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  e quindi l'inclusione è iniettiva da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Q}$ . Si consideri la funzione  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione  $g$  è iniettiva. Siccome  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  è numerabile, esiste  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva e suriettiva. Dunque  $h \circ g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  è iniettiva.

**7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.**

PROPOSIZIONE 3.4. Siano  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi  $A_n$  siano a coppie disgiunti, ovvero  $A_i \cap A_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ . Enumeriamo gli elementi di  $A_n$  in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ ,  $f(n) = a_{n,1}$  è iniettiva. Costruiamo una funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva. È noto che l'insieme  $P \subset \mathbb{N}$  dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo  $P$ :

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$  nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione  $g$  è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \Leftrightarrow p_n^j = p_m^k \Leftrightarrow n = m, j = k \Leftrightarrow a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

**8.  $\mathbb{R}$  non è numerabile.** Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  non è numerabile. È più che numerabile.

#### 4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

**Principio d'induzione.** Sia  $A(n)$  un'affermazione che riguarda il numero naturale  $n \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che:

- i)  $A(0)$  (oppure  $A(1)$  se  $\mathbb{N}$  inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
- ii)  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (*passo induttivo*).

Allora  $A(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.1. Formula per la somma geometrica.** Per ogni numero reale  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$(4.3) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La formula vale anche se  $x \in \mathbb{C}$  è un numero complesso  $x \neq 1$ . La prova è per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

**4.2. Disuguaglianza di Bernoulli.** Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero reale tale che  $x > -1$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha:

$$(4.4) \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

La prova è per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo  $n \in \mathbb{N}$  e proviamola per  $n + 1$ :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

**4.3. Formula del Binomio di Newton.** Il *fattoriale*  $n!$  si definisce per induzione nel seguente modo:

- i)  $0! = 1$  e  $1! = 1$ ;
- ii)  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ .

Dati  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$ , si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando  $n = 1$  la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per  $n$  e proviamola per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$  vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

## 5. Esercizi vari

ESERCIZIO 5.1. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in A \subset \mathbb{R}$ .

- 1) Calcolare il dominio  $A \subset \mathbb{R}$  di  $f$ , ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui  $f$  è definita.
- 2) Calcolare l'immagine  $f(A) \subset \mathbb{R}$ .
- 3) Dire se  $f$  è iniettiva.
- 4) Al variare di  $y \in \mathbb{R}$  calcolare le "fibre"  $f^{-1}(\{y\}) \subset A$ .

ESERCIZIO 5.2. Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $t \in \mathbb{R}$  con  $t > 0$ . Provare la seguente disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2} \left( tx^2 + \frac{1}{t}y^2 \right).$$

ESERCIZIO 5.3. Verificare che  $\log_{10}^2 \notin \mathbb{Q}$ .

ESERCIZIO 5.4. Siano  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  il disco unitario,  $z_0 \in \mathbb{C}$  con  $|z_0| < 1$ , ed  $f : D \rightarrow D$  sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

- 1) Verificare che  $f$  è definita su tutto  $D$  e che  $f(D) \subset D$ ;
- 2) Provare che  $f$  è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa  $f^{-1} : D \rightarrow D$ .



## CHAPTER 2

# Numeri reali

### 1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine (totale) e relazione d'ordine parziale.

**DEFINIZIONE 1.1** (Relazione). Una relazione su un insieme  $X$  è un sottoinsieme  $R \subset X \times X$ . Dati  $x, y \in X$ , diciamo che  $a$  è nella relazione  $R$  con  $y$  se  $(x, y) \in R$ . Scriveremo in questo caso  $xRy$ .

**DEFINIZIONE 1.2** (Ordine totale). Una relazione  $\leq$  su un insieme  $X$  è una relazione di *ordine totale* se per ogni  $x, y, z \in X$  si ha:

- i)  $x \leq x$  (proprietà riflessiva);
- ii)  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$  (confrontabilità);
- iii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  allora  $x = y$  (proprietà antisimmetrica);
- iv) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  allora  $x \leq z$  (proprietà transitiva).

Se si lascia cadere ii) si ottiene una relazione di *ordine parziale*.

### 2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

**DEFINIZIONE 2.1.** I numeri reali sono un insieme  $\mathbb{R}$  munito di due operazioni  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e di una relazione di ordine totale  $\leq$  che verificano, per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

- (S1)  $x + y = y + x$  (proprietà commutativa);
- (S2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (proprietà associativa);
- (S3) esiste  $0 \in \mathbb{R}$  tale che  $x + 0 = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (esiste l'elemento neutro);
- (S4) per ogni  $x \in \mathbb{R}$  esiste  $-x \in \mathbb{R}$  tale che  $x + (-x) = 0$  (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

- (P1)  $x \cdot y = y \cdot x$  (proprietà commutativa);
- (P2)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  (proprietà associativa);
- (P3) esiste  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $1 \neq 0$ , tale che  $1 \cdot x = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (esiste l'elemento neutro);
- (P4) per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , esiste  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  tale che  $x \cdot x^{-1} = 1$  (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

$$(D) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Assiomi dell'ordine:

- (O1) se  $x \leq y$  allora  $x + z \leq y + z$ ;

(O2) se  $x \leq y$  e  $z \geq 0$ , allora  $x \cdot z \leq y \cdot z$ .

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto  $A \subset \mathbb{R}$  superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) definiscono un *campo*. Aggiungendo gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*. Aggiungendo l'assioma di completezza si ottiene un *campo ordinato completo*. Gli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  sono in modo naturale sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ .

I numeri razionali  $\mathbb{Q}$  con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato.

PROPOSIZIONE 2.2. I numeri complessi  $\mathbb{C}$  sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

DIM. Per provare questa affermazione si osservi che in campo ordinato ogni elemento  $x$  verifica  $x^2 \geq 0$  (vedi l'Esercizio ??). Supponiamo per assurdo che ci sia su  $\mathbb{C}$  una relazione d'ordine totale  $\geq$ . L'unità immaginaria  $i$  dovrebbe allora verificare  $-1 = i^2 \geq 0$  e quindi si avrebbe  $1 \leq 0$ . D'altra parte si ha anche  $1 = 1^2 \geq 0$ . Si deduce che  $1 = 0$  e questo non è possibile.  $\square$

L'assioma di completezza può essere formulato in vari modi equivalenti fra loro. Elenchiamo cinque affermazioni che sono equivalenti:

- 1) Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di  $\mathbb{R}$  ha estremo superiore.
- 2) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato di  $\mathbb{R}$  ha estremo inferiore.
- 3) Ogni sezione di  $\mathbb{R}$  ha un unico elemento separatore.
- 4) Ogni successione monotona e limitata in  $\mathbb{R}$  è convergente.
- 5) Ogni successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$  è convergente

Ritourneremo su questi concetti durante il corso.

DEFINIZIONE 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia  $A \subset \mathbb{R}$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

- i) Un elemento  $y \in \mathbb{R}$  è un *maggiorante* di  $A$  se  $x \leq y$  per ogni  $x \in A$ .
- ii) L'insieme  $A$  si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
- iii) Un elemento  $x \in \mathbb{R}$  si dice *estremo superiore* di  $A$  se è un maggiorante di  $A$  e se  $x \leq z$  per ogni altro maggiorante  $z$  di  $A$  (ovvero  $x$  è il minimo dei maggioranti). Se  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo superiore di  $A$  porremo

$$\sup A = x.$$

- iv) Se  $A$  non è superiormente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre  $\sup \emptyset = -\infty$ .

- v) Un numero  $x \in \mathbb{R}$  si dice *massimo* di  $A$  se  $x = \sup A$  ed  $x \in A$ . Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$



L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo superiore di un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  se e solo se:

- i)  $y \leq x$  per ogni  $y \in A$ ;
- ii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $y \in A$  tale che  $y > x - \varepsilon$ .

DEFINIZIONE 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia  $A \subset \mathbb{R}$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

- i) Un elemento  $y \in \mathbb{R}$  è un *minorante* di  $A$  se  $y \leq x$  per ogni  $x \in A$ .
- ii) L'insieme  $A$  si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
- iii) Un elemento  $x \in \mathbb{R}$  si dice *estremo inferiore* di  $A$  se è un minorante di  $A$  e se  $z \leq x$  per ogni altro minorante  $z$  di  $A$  (ovvero  $x$  è il massimo dei minoranti). Se  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo inferiore di  $A$  porremo

$$\inf A = x.$$

- iv) Se  $A$  non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre  $\inf \emptyset = \infty$ .

- v) Un numero  $x \in \mathbb{R}$  si dice *minimo* di  $A$  se  $x = \inf A$  ed  $x \in A$ . Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

### 2.1. Conseguenze della completezza.

PROPOSIZIONE 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ , esiste un numero naturale  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nx > y$ .

DIM. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x, y > 0$  tali che  $nx \leq y$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora l'insieme

$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

è superiormente limitato, in quanto  $y$  ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore  $\bar{x} = \sup A$ . Il numero  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

- 1)  $nx \leq \bar{x}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ovvero  $\bar{x}$  è un maggiorante di  $A$ ;
- 2) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nx > \bar{x} - \varepsilon$ , ovvero  $\bar{x}$  è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo  $\varepsilon = x > 0$  nella proprietà 2) e sia  $n \in \mathbb{N}$  il corrispondente numero naturale, ovvero  $nx > \bar{x} - x$ . Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

DEFINIZIONE 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$

Per la proprietà di Archimede, esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n > x$ . Quindi  $A_x$  è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè  $A_x$

è un sottoinsieme di  $\mathbb{Z}$  questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera* di  $x$

$$[x] = \max \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero  $[x] \in \mathbb{Z}$  è il più grande intero minore o uguale ad  $x$ . La *parte frazionaria* di  $x$  è il numero  $\{x\} = x - [x]$ .

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  sono densi in  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSIZIONE 2.7** (Densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ ). Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ , esiste  $q \in \mathbb{Q}$  tale che  $x < q < y$ .

**DIM.** Siccome  $y - x > 0$ , per la proprietà di Archimede esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n(y - x) > 1$ , ovvero  $ny - nx > 1$ . Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny.$$

Il numero  $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$  verifica dunque  $x < \bar{q} \leq y$ . Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $m(\bar{q} - x) > 1$  e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \leq y.$$

Il numero  $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$  verifica quindi la tesi. □

**2.2. Costruzione di  $\mathbb{R}$  con le sezioni di  $\mathbb{Q}$ .** La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema. Nel seguito verrà illustrata una costruzione puramente metrica di  $\mathbb{R}$ , che prescinde dalla relazione d'ordine.

**DEFINIZIONE 2.8.** Un insieme  $A \subset \mathbb{Q}$  è una sezione (di Dedekind) se:

- (i)  $A, A' \neq \emptyset$ , dove  $A'$  è il complementare di  $A$  in  $\mathbb{Q}$ ;
- (ii) se  $a \in A$  allora  $b \in A$  per ogni numero razionale  $b \leq a$ ;
- (iii) se  $a \in A$  esiste  $b \in A$  con  $a < b$ .

Indichiamo con  $\mathcal{A}$  l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con  $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$  la sezione nulla e con  $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$  la sezione unitaria.

**1. Relazione d'ordine.** Se  $A$  e  $B$  sono sezioni, diciamo che  $A \leq B$  se  $A \subset B$ . L'insieme  $\mathcal{A}$  è totalmente ordinato dalla relazione  $\leq$ .

**2. Somma.** Se  $A$  e  $B$  sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione  $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$ . Scriviamo  $A - B = A + (-B)$ .

**3. Prodotto.** La sezione prodotto si definisce per casi. Se  $A, B \geq 0$  definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}.$$

Se  $A, B \leq 0$  si definisce  $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$ , se  $A \geq 0$  e  $B \leq 0$  si definisce  $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$ , e se  $A \leq 0$  e  $B \geq 0$  si definisce  $A \cdot B = -(-A) \cdot B$ . Infine, per ogni sezione  $A \neq 0$  si definisce la sezione reciproca  $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A\}$ .

Con pazienti verifiche si controlla che  $\mathcal{A}$  è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

**4. Assioma di completezza.** Proviamo la proprietà di completezza.

**TEOREMA 2.9.** L'insieme  $\mathcal{A}$  con le operazioni  $+$  e  $\cdot$  e con la relazione d'ordine  $\leq$  è un campo ordinato *completo*.

**DIM.** Ci interessa verificare la completezza. Sia  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  un insieme superiormente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione  $A \in \mathcal{A}$  tale che  $B \subset A$  per ogni sezione  $B \in \mathcal{B}$ . Vogliamo provare che  $\mathcal{B}$  ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che  $C$  è una sezione di  $\mathbb{Q}$ :

- i)  $C \neq \emptyset$  in quanto  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ . Inoltre,  $C \subset A$  implica  $A' \subset C'$  e poichè per ipotesi  $A' \neq \emptyset$ , segue che  $C' \neq \emptyset$ .
- ii) Siano  $x, y \in \mathbb{Q}$  tali che  $x \in C$  e  $y \leq x$ . Allora esiste  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B$ , e siccome  $B$  è una sezione segue che  $y \in B$ . Dunque si ha anche  $y \in C$ .
- iii) Se  $x \in C$  allora esiste  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B$ . Siccome  $B$  è una sezione, esiste  $y \in B$  tale che  $x < y$ . Ma allora sia ha anche  $y \in C$ .

Verifichiamo infine che  $C = \sup \mathcal{B}$ .

- i) Sicuramente  $B \subset C$  per ogni  $B \in \mathcal{B}$ , ovvero  $C$  è un maggiorante di  $\mathcal{B}$ .
- ii) Proviamo che  $C$  è il minimo dei maggioranti. Sia  $D \in \mathcal{A}$  un maggiorante di  $\mathcal{B}$ . Dalle inclusioni  $B \subset D$  per ogni  $B \in \mathcal{B}$ , segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

### 3. Esercizi vari

**ESERCIZIO 3.1.** Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \right\}.$$

- 1) Calcolare  $\sup A$  e dire se esiste  $\max A$ .
- 2) Calcolare  $\inf A$  e dire se esiste  $\min A$ .

**ESERCIZIO 3.2.** Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme

$$A := \{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

- 1) Calcolare  $\sup A$  e dire se esiste  $\max A$ .
- 2) Calcolare  $\inf A$  e dire se esiste  $\min A$ .

ESERCIZIO 3.3. Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Provare che  $\inf A = -\infty$ .

#### 4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su  $\mathbb{R}$  è la funzione  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari  $x \leq |x|$  e  $-x \leq |x|$ , ed inoltre:

- i)  $|x| \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $|x| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- ii)  $|x| = |-x|$ ;
- iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti,  $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$ . Dalla iii) segue anche  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$  che riordinata fornisce  $|x| - |y| \leq |x - y|$ . Siccome i ruoli di  $x, y$  si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza*  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

- i)  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}$  (disuguaglianza triangolare).

La coppia  $(\mathbb{R}, d)$  è allora uno *spazio metrico*. La funzione  $d(x, y) = |x - y|$  si dice *distanza standard* o *Euclidea* su  $\mathbb{R}$ .

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

**DEFINIZIONE 4.1** (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia  $(X, d)$  dove  $X$  è un insieme e  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni  $x, y, z \in X$  verifica le seguenti proprietà:

- 1)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simmetria);
- 3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico  $(X, d)$ , fissato un punto  $x_0 \in X$  ed un raggio  $r > 0$ , l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro  $x_0$  e raggio  $r$ . Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico  $\mathbb{R}$  con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

**Notazione per gli intervalli.** Gli intervalli di  $\mathbb{R}$  possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano  $-\infty < a < b < \infty$ . Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{intervallo aperto a destra,} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{intervallo aperto a sinistra,} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{intervallo chiuso.} \end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned} (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} && \text{intervallo chiuso,} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{intervallo chiuso,} \end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

La famiglia degli intervalli di  $\mathbb{R}$  coincide con la famiglia degli insiemi convessi di  $\mathbb{R}$ . Inoltre, la famiglia degli intervalli di  $\mathbb{R}$  coincide con la famiglia degli insiemi connessi di  $\mathbb{R}$ . Vedremo la nozione di *insieme connesso* in seguito.

## 5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con  $\mathbb{R}^n$  lo spazio Euclideo  $n$ -dimensionale,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  ha  $n$  coordinate reali  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Su  $\mathbb{R}^n$  è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su  $\mathbb{R}^n$  è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

In questo modo  $\mathbb{R}^n$  ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

**DEFINIZIONE 5.1 (Prodotto scalare).** Definiamo l'operazione  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di  $\mathbb{R}^n$ .

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenero. Precisamente, per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti proprietà:

- 1)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ;
- 2)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- 3)  $\langle x, x \rangle = 0$  se e solo se  $x = 0$ .

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo  $(x, y)$  oppure con il simbolo  $x \cdot y$ .

**DEFINIZIONE 5.2** (Norma Euclidea). La norma Euclidea su  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , è la funzione  $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  così definita

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente,  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  si verifica:

- 1)  $|x| \geq 0$  e  $|x| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- 2)  $|\lambda x| = |\lambda| |x|$  (omogeneità);
- 3)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

**PROPOSIZIONE 5.3** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|.$$

**DIM.** Il polinomio reale della variabile  $t \in \mathbb{R}$ :

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 |y|^2$$

non è mai negativo,  $P(t) \geq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e dunque il suo discriminante verifica  $\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 |x|^2 |y|^2 \leq 0$ . La tesi segue estraendo le radici.  $\square$

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su  $\mathbb{R}^n$  la funzione distanza  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico  $(\mathbb{R}^n, d)$  si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

è la palla Euclidea di raggio  $r > 0$  centrata in  $x \in \mathbb{R}^n$ .





## CHAPTER 3

### Successioni reali e complesse

#### 1. Successioni numeriche

Una *successione reale* (risp. *complessa*) è una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (risp.  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Indicheremo con  $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$  (risp.  $a_n \in \mathbb{C}$ ) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

**DEFINIZIONE 1.1** (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge ad un limite*  $L \in \mathbb{R}$  (risp.  $L \in \mathbb{C}$ ) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

Il numero  $L$  si dice *limite della successione*.

**ESEMPIO 1.2.** Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e cerchiamo  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per  $n \geq \bar{n}$  si abbia

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ . Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

**PROPOSIZIONE 1.3** (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ha limite  $L \in \mathbb{R}$  (risp.  $L \in \mathbb{C}$ ) allora questo limite è unico.

**DIM.** Siano  $L$  ed  $M$  entrambi limiti della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Fissato  $\varepsilon > 0$  a piacere, esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  e  $|a_n - M| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome  $\varepsilon > 0$  è arbitrario, questo implica che  $|L - M| = 0$  e quindi  $L = M$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 1.4. Una successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lasciamo come esercizio la verifica di questa affermazione: una successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge se e solo se convergono le successioni reali  $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n.$$

DEFINIZIONE 1.5. Diremo che una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$  (“più infinito”) se per ogni  $M \in \mathbb{R}$  (arbitrariamente grande) esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Analogamente, diremo che una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $-\infty$  (“meno infinito”) se per ogni  $M \in \mathbb{R}$  (arbitrariamente grande) esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

ESEMPIO 1.6. Verifichiamo usando la definizione che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 10} = \infty.$$

Fissato  $M > 0$  arbitrariamente grande, dobbiamo trovare  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$(1.5) \quad \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 10} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza  $\log(1+n) \leq n$  per  $n \in \mathbb{N}$ , che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 10} \geq n^2 \frac{n-1}{n^2 + 10}.$$

Riduciamo ulteriormente la complessità della disuguaglianza. Per  $n \geq 4$  si ha  $n^2 + 10 \leq 2n^2$ , e quindi con tale restrizione su  $n$  si ottiene

$$\frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 10} \geq \frac{n-1}{2}.$$

Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M + 1.$$

Con la scelta  $\bar{n} = \max\{4, [2M + 1] + 1\}$ , la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè  $\pm\infty$ .

Una successione reale risp. complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si dice *limitata* se l'insieme  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  è limitato in  $\mathbb{R}$  (risp. in  $\mathbb{C}$ ). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste  $C > 0$  tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

**PROPOSIZIONE 1.7.** Se una successione reale o complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente allora è limitata.

**DIM.** Sia  $L \in \mathbb{R}$  (risp.  $L \in \mathbb{C}$ ) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n > \bar{n}$ . Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora  $|a_n| \leq C$  per ogni  $n = 1, \dots, \bar{n}$ , elementarmente. Inoltre, per  $n > \bar{n}$  si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

**TEOREMA 1.8 (Proprietà generali dei limiti).** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni in  $\mathbb{R}$  (risp. in  $\mathbb{C}$ ) convergenti. Allora:

- 1) La successione somma  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 2) La successione prodotto  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 3) Se  $b_n \neq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e il limite di  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non è 0, allora la successione quoziente  $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

**DIM.** Indichiamo con  $L, M \in \mathbb{R}$  (risp.  $L, M \in \mathbb{C}$ ) i limiti delle successioni  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  e  $|b_n - M| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ .

- 1) Allora si ha per ogni  $n \geq \bar{n}$ :

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

- 2) Per la Proposizione 1.7, esiste  $C > 0$  tale che  $|a_n| \leq C$  e  $|b_n| \leq C$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha per ogni  $n \geq \bar{n}$ :

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \leq |b_n| |a_n - L| + |L| |b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

- 3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso  $a_n = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Siccome  $M \neq 0$  per ipotesi, esiste  $\hat{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \hat{n}$  si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per  $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$  si ha

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

**TEOREMA 1.9** (Teorema del confronto). Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni reali tali che esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $n \geq \bar{n}$  si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti  $L, M \in \mathbb{R}$  delle successioni  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , rispettivamente. Se  $L = M$ , allora anche  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge e  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ .

**DIM.** Fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  e  $|c_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L &\leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n &\leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi  $|b_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n \geq \bar{n}$ . □

**DEFINIZIONE 1.10.** Sia  $A(n)$  un'affermazione che riguarda il generico numero naturale  $n \in \mathbb{N}$ . Se esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $A(n)$  è vera per ogni  $n \geq \bar{n}$  diremo che l'affermazione  $A(n)$  è vera definitivamente.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

**PROPOSIZIONE 1.11.** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione infinitesima (ovvero  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ) e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione limitata. Allora la successione prodotto  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è infinitesima.

**DIM.** Sia  $C > 0$  una costante tale che  $|b_n| \leq C$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n| \leq \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

**ESERCIZIO 1.1.** Provare le seguenti affermazioni.

- 1) Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale che diverge a  $\infty$ , e sia  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale limitata. Provare che la successione somma  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$ .
- 2) Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale che diverge a  $\infty$ , e sia  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale con questa proprietà: esiste  $\delta > 0$  tale che  $b_n \geq \delta$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora la successione prodotto  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$ .