

Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto

Lunedì 20 Febbraio 2012

Esercizio 1 (7 punti) Per ciascun $\alpha \in \mathbb{R}$ stabilire se la seguente serie converge oppure no:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha} + 1}.$$

Esercizio 2 (7 punti) Sia $x \in \mathbb{Q}$ un numero tale che $x = p/q$ con p intero dispari e $q \geq 2$ intero pari. Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |e^{2\pi n x i} + 1|^2 \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |e^{2\pi n x i} + 1|^2.$$

Esercizio 3 (8 punti) Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
- 2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

Esercizio 4 (8 punti) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

- i) L'interno $\text{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A .
- ii) La chiusura \overline{A} è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A .

Provare ogni affermazione

2 ore e 30 minuti a disposizione