Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto | Lunedì 20 Febbraio 2012

Esercizio 1 (8 punti) Per ciascun $\alpha \in \mathbb{R}$ stabilire se la seguente serie converge oppure no:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha + 1}.$$

Risoluzione. Se $\alpha \leq 0$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha + 1} = \infty.$$

La serie non converge in quanto non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza. Quando $0 < \alpha \leq 1$ si ha definitivamente (ad es. per $n \geq 4$)

$$\frac{\log n}{n^\alpha + 1} \geq \frac{1}{2n^\alpha}.$$

Per il Teorema del confronto la serie diverge:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha + 1} \geq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2n^\alpha} = \infty.$$

Consideriamo il caso $\alpha > 1$. Sia $0 < \varepsilon < \alpha - 1$. Un tale ε esiste. Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\varepsilon} = 0,$$

e quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ vale $\log n \leq n^\varepsilon$, e dunque la serie converge per il Teorema del confronto:

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha + 1} \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} < \infty.$$

Infatti, si ha $\alpha - \varepsilon > 1$.
A risultati analoghi si perviene con il criterio di condesazione di Cauchy. In questo approccio risulta però complicato verifica che la successione

$$n \mapsto \frac{\log n}{n^\alpha + 1}$$

è definitivamente decrescente (quando $\alpha > 0$).

Esercizio 2 (8 punti) Sia $x \in \mathbb{Q}$ un numero tale che $x = p/q$ con p intero dispari e $q \geq 2$ intero pari. Calcolare i seguenti

$$L^-(x) = \liminf_{n\to\infty} \left|\mathrm{e}^{2\pi nxi} + 1\right|^2 \quad \text{e} \quad L^+(x) = \limsup_{n\to\infty} \left|\mathrm{e}^{2\pi nxi} + 1\right|^2.$$

Risoluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\left|\mathrm{e}^{2\pi nxi} + 1\right|^2 = \left|\cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx) + 1\right|^2 = 2\big(1 + \cos(2\pi nx)\big).$$

Quindi vale sempre $0 \leq L^-(x) \leq L^+(x) \leq 4$.
Consideriamo la seguente selezione crescente di indici

$$n_k = \frac{q}{2}k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente risulta $n_k \in \mathbb{N}$ in quanto q è pari. D'altra parte, essendo p dispari, si ha

$$2\pi n_k x = \pi k p = \begin{cases} \pi \cdot \text{pari} & \text{se } k \text{ pari,} \\ \pi \cdot \text{dispari} & \text{se } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Concludiamo allora che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\cos(2\pi n_{2k} x) = 1 \quad \text{e} \quad \cos(2\pi n_{2k+1} x) = -1.$$

Questo prova che $L^-(x) = 0$ ed $L^+(x) = 4$ per ogni x della forma data.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

Risoluzione. Premettiamo le seguenti considerazioni:

$$\varphi(x) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x - x^3 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0,$$

e inoltre

$$\varphi(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - x^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1].$$

Con un argomento induttivo, deduciamo da tali considerazioni i seguenti fatti:
i) Se $a_0 \in [0, 1]$ allora $a_n \geq 0$ e $a_{n+1} = \varphi(a_n) \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
ii) Se $a_0 \in [-1, 0]$ allora $a_n \leq 0$ e $a_{n+1} = \varphi(a_n) \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In entrambi i casi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona e limitata e dunque converge ad un limite finito $L \in \mathbb{R}$. Il numero L verifica la seguente equazione:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = \varphi(L).$$

Qui abbiamo usato la continuità di φ. L'unica soluzione dell'equazione $L = \varphi(L) = L - L^3$ è $L = 0$. Questo termina la soluzione della parte 1).

Per rispondere alla seconda domanda conviene considerare la successione $b_n = |a_n|$, con $n \geq 0$. Questa successione è definita dalla relazione ricorsiva

$$b_{n+1} = |a_{n+1}| = |\varphi(a_n)| = |\varphi(b_n)| = |b_n - b_n^3|.$$

Chiaramente si ha $b_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$. Studiamo preliminarmente la seguente disequazione:

$$|\varphi(x)| \leq |x| \quad \Leftrightarrow \quad |x(1-x^2)| \leq |x|.$$

Tale disequazione è equivalente a (dividiamo per $|x| \neq 0$, se $x = 0$ c'è comunque equivalenza)

$$|1-x^2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

In effetti, si hanno le disuguaglianze strette:

$$\begin{aligned} &|\varphi(x)| < |x| \text{ se } 0 < |x| < \sqrt{2} \text{ e} \\ &|\varphi(x)| > |x| \text{ se } |x| > \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Con un argomento induttivo deduciamo i seguenti fatti:

i) Se $b_0 = |a_0| < \sqrt{2}$ la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e dunque converge. L'unico limite possibile è $L = 0$. Segue che anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

ii) Se $b_0 = \sqrt{2}$ allora $b_n = \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tuttavia, cambia segno, e dunque non converge.

iii) Se $b_0 > \sqrt{2}$ allora la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Siccome non può convergere ad un valore finito (gli unici limiti possibili sarebbero 0 e $\sqrt{2}$) deve divergere a ∞. Segue che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge.

Esercizio 4 (8 punti) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) L'interno $\mathrm{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A.

ii) La chiusura $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Risoluzione. i) Se $x \in \mathrm{int}(A)$ allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. Sia ora $y \in B_r(x)$ e fissiamo $0 < s < r - d(x, y)$. Se $z \in B_s(y)$ allora

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) < r,$$

ovvero $z \in B_r(x)$. Dunque, $B_s(y) \subset B_r(x) \subset A$, e questo prova che $y \in \mathrm{int}(A)$ per ogni $y \in B_t(x)$, ovvero $B_r(x) \subset \mathrm{int}(A)$. Questo prova che $\mathrm{int}(A)$ è aperto.

Sia ora B un aperto tale che $B \subset A$. Se $x \in B$ allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset B \subset A$ e quindi $x \in \mathrm{int}(A)$. Questo prova che $B \subset \mathrm{int}(A)$. Sappiamo che $\mathrm{int}(A) \subset A$. Quindi $\mathrm{int}(A)$ è il più grande aperto contenuto in A.

ii) La cosa più semplice è di argomentare per dualità. Infatti si ha

$$X \setminus \overline{A} = \big\{ x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \cap A = \emptyset \ \big\} = \mathrm{int}(X \setminus A),$$

e l'ultimo insieme è aperto per il punto i). Dunque $\overline{A}$ è chiuso.

Sia ora C un chiuso che contiene A. Se $x \in \overline{A}$ allora $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. Ma siccome $A \subset C$ si ha anche $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. Dunque, si conclude che $x \in \overline{C} = C$, come dovevasi dimostrare. Dunque, la chiusura di un insieme è il più piccolo chiuso che contiene l'insieme.

Ecco altri due argomenti alternativi per provare che $\overline{A}$ è chiuso.

L'inclusione $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ è sempre vera. Dobbiamo provare l'inclusione opposta $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Sia $x \in \overline{\overline{A}}$. Allora per ogni $r > 0$ si ha $B_r(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Esiste dunque $y \in B_r(x) \cap \overline{A}$. Sia $s > 0$ tale che $B_s(y) \subset B_r(x)$. Tale $s > 0$ esiste. Siccome $y \in \overline{A}$ si avrà

$$B_s(y) \cap A \neq \emptyset.$$

Per inclusione deduciamo che $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Questo prova che $x \in \overline{A}$.

Alternativamente, si può lavorare con la caratterizzazione sequenziale della chiusura. Se $x \in \overline{\overline{A}}$ allora esiste una successione $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\bar{x}_n \in \overline{A}$ e $d(\bar{x}_n, x) < 1/n$ per ogni $n \geq 1$. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ tale che $d(x_n, \bar{x}_n) < 1/n$. In conclusione, si ha

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, \bar{x}_n) + d(\bar{x}_n, x) \leq \frac{2}{n}.$$

Dunque la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad x ed è contenuta in A. Questo prova che $x \in \overline{A}$.