Analisi Matematica 1 – Matematica

Continuità | Mercoledì 20 Dicembre - Foglio 10

Esercizio 1 Sia $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$ e si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}, \quad x \in A.$$
Usando la definizione $\varepsilon - \delta$, provare che la funzione f è continua su A.

Esercizio 2 Usando la definizione $\varepsilon - \delta$, provare che la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$$f(z) = \frac{z^2}{|z|^2 + 1}, \quad z \in \mathbb{C},$$
è continua su tutto $\mathbb{C}$.

Esercizio 3 Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $|\lambda| < 1$, sia $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, un punto fissato e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$$f(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$
Per induzione, definiamo la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$ nel seguente modo: $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ per $n \in \mathbb{N}$. Provare che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

Esercizio 4 Sia X un insieme e sia d la distanza discreta su X. Su $\mathbb{R}$ consideriamo la distanza Euclidea.

1) Descrivere l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$.

2) Sia $f : \mathbb{R} \to X$ una funzione continua. Descrivere la funzione f.

Esercizio 5 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0, \text{ coprimi.} \end{cases}$$
Calcolare l'insieme dei punti in cui f è continua (nella distanza standard).