Analisi Matematica 1 – Matematica

Aperti, chiusi, completamento — Mercoledì 11 Gennaio - Foglio 11

Esercizio 1 Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 2 Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; iv) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 3 Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se eiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Esercizio 4 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\big\}.$$

i) Provare che A è limitato.

ii) Provare che A è aperto.

iii) Dimostrare che $\partial A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0\big\}$.

iv) Calcolare la chiusura $\overline{A}$.

v) Rappresentare A nel piano Cartesiano (in modo approssimativo).

Esercizio 5 Dopo aver determinato l'immagine della funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \Big(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

considerare lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con la distanza

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che d è effettivamente una metrica su $\mathbb{R}$.

ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.

iii) Calcolare il completamento di questo spazio metrico.

Esercizio 6 Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z+\zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$,