Analisi Matematica 1 – Matematica

Secondo Compitino - Simulazione — Mercoledì 18 Gennaio 2012

Esercizio 1 (8 punti) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme da determinare e consideriamo la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}, \quad x \in A.$$

i) Determinare il più grande insieme $A \subset \mathbb{R}$ su cui f è definita.

ii) Utilizzando la definizione $\varepsilon - \delta$, provare che f è continua su A (nella distanza standard).

Risoluzione. Affinchè f sia ben definita deve essere $|x| \neq 1$. Dunque, il più grande insieme su cui f è definita è

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq \pm 1\}.$$

Sia $x_0 \in A$ un punto fissato. Dato $\varepsilon > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$, con $x \in A$, implichi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Analizziamo la differenza

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1+|x|}{1-|x|} - \frac{1+|x_0|}{1-|x_0|} = \frac{2|x| - 2|x_0|}{(1-|x|)(1-|x_0|)},$$

e dunque, usando la disuguaglianza $\big||x| - |x_0|\big| \le |x - x_0|$, si trova

$$|f(x) - f(x_0)| \le 2\frac{|x - x_0|}{\big|1-|x|\big|\big|1-|x_0|\big|}.$$

Dobbiamo stimare il termine $\big|1-|x|\big|$ dal basso. Siccome $x_0 \in A$, avremo $\big|1-|x_0|\big| > 0$. Possiamo allora supporre che

$$|x - x_0| < \frac{1}{2}\big|1-|x_0|\big|. \qquad (*)$$

Questa restrizione, che dovrà intervenire nella scelta finale di $\delta > 0$ assicura che

$$\big|1-|x|\big| \ge \frac{1}{2}\big|1-|x_0|\big|.$$

La prova di questo fatto è conseguenza delle disuguaglianze seguenti:

$$\big|1-|x|\big| = \big|1-|x_0| + |x_0| - |x|\big| \ge \big|1-|x_0|\big| - \big||x_0| - |x|\big| \ge \big|1-|x_0|\big| - \big|x - x_0\big|.$$

Ritornando alla f, si trova

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{4|x - x_0|}{\big|1-|x_0|\big|^2}.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $x \in A$ che verifichi $(*)$. La disuguaglianza

$$\frac{4|x-x_0|}{\big|1-|x_0|\big|^2} < \varepsilon$$

è equivalente a

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon\big|1-|x_0|\big|^2}{4}.$$

Dunque, la scelta

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon\big|1-|x_0|\big|^2}{4}, \frac{1}{2}\big|1-|x_0|\big|\right\} > 0$$

rende vera l'implicazione desiderata.

Esercizio 2 (8 punti) Al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$, si consideri la serie di potenze nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n^\alpha + 1}.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.

ii) Discutere la convergenza della serie nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.

iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

Sia noto che la successione $n \mapsto n/(n^\alpha + 1)$ è decrescente quando $\alpha > 1$.

Risoluzione. i) Il raggio di convergenza R è dato dalla formula

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^\alpha+1}} = 1.$$

Il limsup è in effetti un lim, ed il valore del limite segue da risultati noti. Dunque il raggio di convergenza è $R = 1$.

ii) Quando $|z| = 1$ si ha $z = \mathrm{e}^{i\vartheta}$ per qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha + 1}.$$

Se $\alpha \leq 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha+1} \neq 0.$$

Il limite in effetti non esiste. Mancando la condizione necessaria di convergenza, la serie in esame non converge se $\alpha \leq 1$.

Nel seguito, possiamo restringere lo studio al caso $\alpha > 1$.

Quando $\vartheta = 0$, il fattore "rotante" scompare e il termine generale della serie è asintotico ad $1/n^{\alpha-1}$. La verifica di questo fatto è elementare. Dal Criterio del confronto asintotico, segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha + 1} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 2.$$

Quando $\vartheta \in (0, 2\pi)$ usiamo il Criterio di Abel-Dirichlet. Se $\alpha > 1$, la successione $a_n = n/(n^\alpha + 1)$ è decrescente (fatto noto) e infinitesima (dimostrazione elementare). Inoltre la successione $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$ ha primitiva limitata (fatto noto più volte visto in classe). Dunque, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha + 1}$$

converge per $\alpha > 1$.

iii) Dal Criterio di Cauchy-Hadamard sappiamo che su ciascun insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \delta\}$ con $0 \le \delta < 1$ la serie converge totalmente e quindi uniformemente.

L'estremo superiore sull'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ del termine generale della serie di potenze è

$$\sup_{|z|\le 1} \left| \frac{nz^n}{n^\alpha + 1} \right| = \frac{n}{n^\alpha + 1}.$$

Quando $\alpha > 2$, Criterio di Weierstrass assicura la convergenza uniforme della serie su tutto il disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$. Quando $1 < \alpha \le 2$ non c'è convergenza uniforme su questo disco, in quanto manca la convergenza puntuale in $z = 1$.

Dal Criterio di Abel sappiamo che la serie converge uniformemente su ogni segmento $[0, z]$ con $|z| = 1$, $z \ne 1$, anche nel caso $1 < \alpha \le 2$.

Esercizio 3 (8 punti) Si consideri la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|^{1/2}\}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico.

ii) Disegnare l'insieme $B_r(0)$, $0 \in \mathbb{R}^2$, nel caso $r = 1/2$ ed $r = 2$.

iii) Provare che la topologia di $(\mathbb{R}^2, d)$ coincide con la topologia standard di $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. i) Usiamo la notazione $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Verifichiamo le proprietà della funzione distanza.

a) Ovviamente $d(x, y) \ge 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se poi $d(x, y) = 0$ allora $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|^{1/2} = 0$ e quindi $x_1 = y_2$ e $x_2 = y_2$, ovvero $x = y$.

b) La proprietà simmetrica $d(x, y) = d(y, x)$ segue dal fatto che $|t| = | - t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

c) Ricordiamo che la funzione $\delta(x,y) = |x-y|^{1/2}$ è una distanza su $\mathbb{R}$ che, in particolare verifica la disuguaglianza triangolare. La disuguaglianza triangolare per d segue allora dal fatto che per ogni $z, y, z \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|^{1/2}\} \le \max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2|^{1/2} + |z_2 - y_2|^{1/2}\}.$$

ii) Abbiamo, rispettivamente:

$$B_{1/2}(0) = (-1/2, 1/2) \times (-1/4, 1/4), \quad \text{rettangolo con base larga,}$$

$$B_2(0) = (-2, 2) \times (4, 4), \quad \text{rettangolo con base stretta rispetto all'altezza.}$$

iii) Un insieme è aperto se tutti i suoi punti sono punti interni. Bisogna dunque controllare che la nozione di punto interno per la distanza d coincide con la nozione di punto interno per la distanza standard.

Possiamo limitare la discussione a palle con raggio $r \le 1$ centrate in $0 \in \mathbb{R}^2$. Indichiamo con $B_r^E(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ la palla Euclidea. Argomenti elementari di geometria provano i seguenti fatti. Se $r \le 1$ si ha l'inclusione

$$B^E_{r^2}(0) \subset B_r(0).$$

Quindi se 0 è un punto interno per la distanza d lo è anche per la distanza Euclidea. D'altra parte si ha anche, sempre per $r \le 1$,

$$B_r(0) \subset B^E_{\sqrt{2}r}(0).$$

Quindi se 0 è un punto interno per la distanza Euclidea lo è anche per la distanza d.

Esercizio 4 (8 punti) Provare che per ogni successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);

(B) Esiste un numero $L \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad L.

Risoluzione. (A)$\Rightarrow$(B) Non c'è nulla da dimostrare perchè se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $L \in \mathbb{R}$ allora ogni sua sottosuccessione converge pure ad L.

(B)$\Rightarrow$(A) Supponiamo per assurdo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converga ad $L \in \mathbb{R}$, ovvero: esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \ge \bar{n}$ tale che $|a_n - L| \ge \varepsilon$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $k \mapsto n_k$ tale che $|a_{n_k} - L| \ge \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. La sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ non può avere alcuna sottosuccessione che converge ad L. Questo contraddice (B).

---

2 ore e 30 minuti a disposizione