Analisi Matematica 1 – Matematica

Insiemi compatti 25 Gennaio - Foglio 13

Esercizio 1 Sia (X, d) uno spazio metrico. Provare che:

i) Se $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ è una famiglia di compatti di X allora $K = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha$ è compatto.

ii) Se $K_1, \dots, K_n$, $n \in \mathbb{N}$, sono compatti di X allora $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ è compatto.

Esercizio 2 Siano $m, k, n \in \mathbb{N}$ con $m + k = n$. Su $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ fissiamo la distanza standard. Provare che se $H \subset \mathbb{R}^m$ ed $K \subset \mathbb{R}^k$ sono compatti, allora $H \times K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto.

Esercizio 3 Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 \le 1\big\},$$

$$H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x^3 + xy + y^3 \le 1\big\}.$$

Esercizio 4 Provare il seguente teorema. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che:

i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.

Provare allora che esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme $A \subset X$ è $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$.

Esercizio 5 Sia $K \subset \ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme

$$K = \Big\{\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R}) : |x_n| \le \frac{1}{n} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\Big\},$$

dove $\mathrm{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Provare che K è compatto. Questo esercizio è difficile.