Analisi Matematica 1 – Matematica

Numeri reali, sup e inf, binomio di Newton — Foglio 2

Esercizio 1 Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \left\{ x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.

3) Verificare che $\sup C = \infty$.

4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

Esercizio 2 Provare che non esiste alcun numero $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 3$.

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

e siano $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$ tali che $r \neq |z_0|$. Verificare che l'immagine rispetto f della circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ è ancora una circonferenza. Calcolarne il raggio e il centro in funzione di z_0 ed r.

Esercizio 4 Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato, provare le seguenti affermazioni:

1) Per ogni x si ha $x^2 \geq 0$;

2) Per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \leq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$.

Indicare in ciascun passaggio la proprietà che si utilizza.

Esercizio 5 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$. Iniziare con il caso $b = 0$.

Esercizio 6 Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \ldots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$