Analisi Matematica 1 – Matematica

Successioni Foglio 4

Esercizio 1 Usando i teoremi elementari, calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n + n^2 \sin(n) + 1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}$; 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4(n) + n\arctan(n)}{n^2 + \log n}$; 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \log n + 1/n}$.

Esercizio 2 Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso e si consideri la successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \left(z^n + \frac{i}{2}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che per $|z| < 1$ la successione converge e che per $|z| > 1$ la successione non converge.

Esercizio 3 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Provare allora che anche $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Adattare questo risultato per calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

Esercizio 4 Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Nel seguito indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.

2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita

$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\big\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$

definisce una norma (e cioè verifica le proprietà 1), 2), 3) a metà di pagina 22).

3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita

$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_\infty$$

è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.