Analisi Matematica 1 – Matematica

Numero e, liminf e limsup, punti di accumulazione — Foglio 5

Esercizio 1 Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^3}{2n+1}};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!};\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^n+n!\log(n+1)}{2^n+(n+1)^n}.$$

Esercizio 2 Verificare che

$$\liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\}=0,\quad \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\}=1,$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 3 Siano $z, w\in\mathbb{C}$ due numeri complessi. Calcolare il limite superiore

$$\limsup_{n\to\infty}|z^n-w^n|^{1/n}.$$

Dire in quali casi il limite superiore è un limite e calcolarlo.

Esercizio 4 Per $n\in\mathbb{N}$ sia $a_n\in\mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x-1$ nella variabile $x\in\mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

Esercizio 5 Calcolare tutti i punti di accumulazione dell'insieme $A\subset\mathbb{R}$

$$A=\left\{\sqrt{n}-\sqrt{m}\in\mathbb{R}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Esercizio 6 Provare il seguente teorema. Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);

(B) Esiste un numero $L\in\mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad L.

L'implicazione interessante è (B)$\Rightarrow$(A).

Esercizio 7 Provare che $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e})=2\pi$. Questo esercizio è difficile.