Analisi Matematica 1 – Matematica

Successioni e serie numeriche — Foglio 6

Esercizio 1 Usando argomenti di confronto elementari, studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}.$$

Esercizio 2 Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sin(\sin n)\big|^n.$$

Esercizio 3 Calcolare esplicitamente la somma delle seguenti serie

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Esercizio 4 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente nel seguente modo: $a_0 \in (0,1)$ è un numero fissato e $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ per $n \geq 0$.

1) Provare che il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ esiste e calcolarlo.

2) Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n$.

Esercizio 5 i) Studiare la convergenza della successione $(a_n)_{n\geq 2}$ così definita:

$$a_n = \sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{n}}}, \quad n \geq 2.$$

ii) Studiare la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\ldots\sqrt{n!}}}, \quad n \geq 1.$$

Esercizio 6 Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$.

Esercizio 7 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Provare allora che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.