Analisi Matematica 1 – Matematica

Esercizi vari | Venerdì 9 Dicembre - Foglio 8

Esercizio 1 Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza delle serie

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}}-\sqrt{1+\frac{\beta}{n}}\Big);\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(1/n^{\alpha})}{[1-\cos(1/n)]^{\beta}}.$$

Esercizio 2 Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, così definite

$$f_n(x)=\frac{(n+1)x+n^2x^3}{1+n^2x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Per ogni $x\in\mathbb{R}$ calcolare il limite puntuale

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

ii) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente su $\mathbb{R}$.
iii) Provare che c'è convergenza uniforme su ogni insieme $\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq\delta\}$ con $\delta>0$.

Esercizio 3 Siano $m,n\in\mathbb{N}$ tali che $m\leq n$ e siano $a_m\geq a_{m+1}\geq\ldots\geq a_n\geq 0$ numeri reali. Provare che per ogni $x\in(0,2\pi)$ vale la disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=m}^{n}a_k e^{ikx}\Big|\leq\frac{a_m}{|\sin(x/2)|}.$$

Suggerimento: somma per parti.

Esercizio 4 Per ogni numero reale $x\in\mathbb{R}$ non negativo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}.$$

Risposta: $1-2\{x\}$. Sopra $[x]$ e $\{x\}$ sono la parte intera e la parte frazionaria di x. Lavorare in rappresentazione binaria

$$x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{a_k}{2^k},\quad a_k\in\{0,1\}.$$