Analisi Matematica 1 – Matematica

Serie di potenze, $\exp$, spazi metrici — Venerdì 15 Dicembre - Foglio 9

Esercizio 1 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.
ii) Discutere la convergenza nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.
iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

Esercizio 2 Sia $\alpha > 0$ e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) z^n.$$

Rispondere alle domande i), ii) e iii) come nell'esercizio precedente.

Esercizio 3 Al variare di $w \in \mathbb{C}$, calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $\exp(z) = w$. Determinare insiemi $A \subset \mathbb{C}$ "grandi" tali che $\exp : A \to \exp(A)$ sia iniettiva e calcolarne l'inversa.

Esercizio 4 Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

Esercizio 5 Sia V l'insieme di tutte le successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Costruire una funzione $d : V \times V \to [0, \infty)$ tale che:
1) (V, d) è uno spazio metrico.
2) Per ogni $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in V$ si ha $d(\mathrm{x}+\mathrm{z}, \mathrm{y}+\mathrm{z}) = d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. (Invarianza per traslazioni).
3) Per ogni numero reale $t \in [0, 1)$ esistono dei punti $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$ tali che $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = t$.