

# Analisi Matematica 1 – Matematica

Primo Compitino

Mercoledì 7 Dicembre 2011

---

## VERSIONE A

**Esercizio 1** (8 punti) Al variare di  $x \in [-\pi, \pi]$ , studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n \cos^n(x)}{n+1}.$$

**Esercizio 2** (8 punti) Al variare di  $z \in \mathbb{C}$  studiare la convergenza della successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = \left( 3z^n + \frac{2ni}{3ni+1} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

e, quando esiste, calcolarne il limite.

**Esercizio 3** (8 punti) Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

dove  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ . Calcolare  $\sup A$ ,  $\inf A$  e dire se esistono  $\max A$  e  $\min A$ .

**Esercizio 4** (8 punti) Sia  $x \in \mathbb{Q}$  un numero razionale non negativo,  $x \geq 0$ . Dopo aver richiamato la caratterizzazione del limite superiore, dimostrare che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sin \left( \left( \frac{1}{2} + nx \right) \pi \right) - \frac{1}{n} \right\} = 1.$$

---

2 ore e 30 minuti a disposizione