Analisi Matematica 1 – Matematica

Compitino — Mercoledì 7 Dicembre 2012

Esercizio 1 (8 punti) Al variare di $x \in [-\pi, \pi]$, studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n \cos^n(x)}{n+1}.$$

Soluzione. Iniziamo a studiare la convergenza assoluta, e cioè domandiamoci quando converge la serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n |\cos x|^n}{n+1}.$$

Possiamo applicare il criterio della radice o del rapporto. Ad esempio, con il criterio del rapporto si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}(n+1)}{\sqrt{n}(n+2)} 2|\cos x|,$$

e dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}(n+1)}{\sqrt{n}(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/n}(1+1/n)}{(1+2/n)} = 1,$$

si trova il limite del rapporto

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2|\cos x|.$$

Dal Criterio del rapporto segue che si ha convergenza assoluta per $L(x) < 1$ ovvero per $|\cos x| < 1/2$, ovvero per $x \in (-2\pi/3, -\pi/3) \cup (\pi/3, 2\pi/3)$. Per il criterio della convergenza assoluta, in questo caso si ha anche convergenza semplice.

Se $L(x) > 1$ non si ha convergenza assoluta. Più precisamente, in questo caso il termine generale non è infinitesimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n |\cos x|^n}{n+1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n (\cos x)^n}{n+1} \neq 0,$$

dove il limite a destra potrebbe anche non esistere. Quindi non si ha nemmeno convergenza semplice.

Rimane da esaminare il caso $L(x) = 1$. Separiamo i casi $\cos x = 1/2$ e $\cos x = -1/2$.

Nel caso $\cos x = 1/2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \infty.$$

La divergenza dell'ultima serie è un fatto noto. Per il Teorema del confronto la serie in esame diverge.
Nel caso $\cos x = -1/2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}.$$

La serie non converge assolutamente per la discussione precedente. Studiamo la convergenza semplice. La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

è infinitesima:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+1/n)} = 0.$$

Se verifichiamo che è anche decrescente, la convergenza semplice segue dal Criterio di Leibniz. In effetti, si ha

$$b_{n+1} \leq b_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)^3 \leq n(n+2)^2 \Leftrightarrow \quad 1 \leq n^2 + n.$$

L'ultima disuguaglianza è verificata per $n \geq 1$. Quindi per il Criterio di Leibniz, la serie converge nel caso in esame.

Esercizio 2 (8 punti) Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \Big(3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

e, quando esiste, calcolarne il limite.

Soluzione. Distinguiamo due casi: 1) $|z| < 1$; 2) $|z| \geq 1$. Nel caso $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0.$$

Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $3|z|^n < 1/4$. Si hanno allora le maggiorazioni

$$\Big|3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\Big| \leq 3|z|^n + \Big|\frac{2ni}{3ni+1}\Big| \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}.$$

Dunque, per $n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n| \leq q^n$ con $q = \frac{11}{12} < 1$. Per confronto segue che $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ e quindi per $|z| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left(3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\right)^n = 0.$$

Passiamo al caso $|z| \geq 1$. In questo caso si ha

$$\left|3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\right|^n \geq \left(3|z|^n - \frac{|2ni|}{|3ni+1|}\right)^n \geq \left(3 - \frac{2}{3}\right)^n \geq 2^n.$$

Per confronto, quando $|z| \geq 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty.$$

Si deduce che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere. Se fosse infatti $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{C}$ allora si avrebbe $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L| < \infty$.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$ e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

Soluzione. Consideriamo la successione

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1,$$

ed anche la successione

$$b_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è chiaramente crescente. Da questo fatto segue che: a) la successione $n \mapsto -\frac{n+1}{n}$ è crescente; b) la successione $n \mapsto \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ è crescente. Dunque la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente in quanto somma di due successioni crescenti. Inoltre risulta chiaramente (non è necessario entrare in ulteriori dettagli, qui)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Da questi fatti deduciamo che

$$\inf A = \min A = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2,$$

e che

$$\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Siccome $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme A non ha massimo.

Esercizio 4 (8 punti) Sia $x \in \mathbb{Q}$ un numero razionale non negativo, $x \geq 0$. Dopo aver richiamato la caratterizzazione per il limite superiore, dimostrare che

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sin\left(\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi\right) - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Soluzione. Posto

$$a_n = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi\right) - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

dobbiamo verificare che:

i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n < 1 + \varepsilon$.

ii) $\forall \varepsilon > 0 \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > 1 - \varepsilon$.

L'affermazione i) è banalmente verificata, in quanto

$$\sin\left(\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi\right) - \frac{1}{n} < 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proviamo l'affermazione ii). Calcoliamo gli $n \in \mathbb{N}$ tali che il seno sia massimo, ovvero gli $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$\sin\left(\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi\right) = 1.$$

Se $x = 0$ tale identità è sempre verificata, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo supporre $x > 0$, avremo $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e $p, q \neq 0$. Si deve allora avere

$$\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero,

$$n = \frac{2k}{x} = \frac{2qk}{p}.$$

Osserviamo che se k è un multiplo di p risulta $n \in \mathbb{N}$. Quindi scegliendo $k = ph$ con $h \in \mathbb{N}$ troveremo gli indici $n = n_h = 2qh$. La successione $(n_h)_{h\in\mathbb{N}}$ verifica ovviamente

$$\lim_{h\to\infty} n_h = \infty,$$

e dunque

$$\lim_{h\to\infty} a_{n_h} = \lim_{h\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n_h}\right) = 1.$$

Da questi fatti segue immediatamente l'affermazione ii).