Analisi Matematica 1

Nome: Appello scritto del 23 Luglio 2012

Esercizio 1 (8 punti) Al variare del numero reale $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}.$$

Suggerimento: opportuni confronti.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} n \sin\left(x a_n \pi\right) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n\to\infty} n \sin\left(x a_n \pi\right).$$

Esercizio 3 (8 punti) Determinare il più grande valore della costante $K > 0$ tale che per ogni $x > 0$ risulti

$$\log x \leq \frac{\sqrt{x}}{K}.$$

Esercizio 4 (8 punti) Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f_\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_\alpha(x) := \log\left(\frac{x^\alpha + 5}{x^\alpha + 4}\right), \quad x \in [0, +\infty).$$

i) Determinare le primitive di f_2 (cioè per $\alpha = 2$).

ii) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx.$$

Tempo a disposizione: 3 ore.

ESERCIZIO 1 Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n!))^{\alpha}} .$$

Soluzione. Ricordiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 .$$

Dunque, definitivamente si ha

$$\frac{2^n}{n!} < 1 \iff 2^n < n!$$

$$\frac{n!}{n^n} < 1 \iff n! < n^n .$$

E quindi, definitivamente,

$$n \log 2 = \log 2^n < \log(n!) < \log n^n = n \log n .$$

Per confronto, per $\alpha > 1$ si ha

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{(\log(n!))^{\alpha}} \leqslant \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log 2)^{\alpha}} < \infty .$$

Dunque, per $\alpha > 1$ la serie converge.
Sopra $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è un numero naturale opportunamente grande.

Nel caso $0<\alpha\leq 1$ si ha

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\frac{1}{(\log(n!))^{\alpha}} \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\alpha}} \overset{0<\alpha\leq 1}{\geq} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\frac{1}{n\log(n)} \overset{(*)}{=} \infty .$$

Per confronto la serie diverge.

Il fatto $(*)$, che è noto, si verifica col criterio di Cauchy:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log(n)}=\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\log 2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log 2} \underset{\text{NOTO}}{=} \infty .$$

Conclusione: la serie converge $\iff \alpha>1$. $\square$

ESERCIZIO 3 Determinare il più grande valore di $K>0$ tale che per ogni $x>0$ risulti

$$\log x \le \frac{\sqrt{x}}{K} .$$

Soluzione. Consideriamo la funzione $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \sqrt{x} - K \log x .$$

Vogliamo trovare K massima tale che $\phi(x) \ge 0$ $\forall x>0$.
Studiamo la funzione. Derivata:

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - K\frac{1}{x} .$$

Segno della derivata

$$\phi'(x) \ge 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{K}{x} \ge 0 \overset{(x>0)}{\iff} \sqrt{x} - 2K \ge 0$$
$$\iff x \ge 4K^2$$

Dunque ϕ cresce nell'intervallo $(4K^2, \infty)$ e decresce in $(0, 4K^2)$.
Nel punto $x = 4K^2$ ϕ assume il valore minimo assoluto che è

$$\phi(4K^2) = 2K - K\log(4K^2) .$$

La costante ottimale si trova imponendo $\phi(4K^2) = 0$, ovvero

$$2K - K\log(4K^2) = 0 \underset{(K>0)}{\iff} \log(4K^2) = 2$$
$$\iff 4K^2 = e^2 \iff K = \frac{e}{2} .$$

Dunque, la disuguaglianza ottimale è:

$$\log x \le \frac{2}{e}\sqrt{x} , \qquad x>0 .$$

□