Analisi Matematica 1

Nome: Appello scritto del 1 Febbraio 2013

Esercizio 1 (8 punti) Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione non negativa tale che:
a) $\varphi(0) = 0$; b) φ è strettamente crescente; c) φ è continua.

1) Provare che per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale l'implicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|^2) < \infty. \qquad (*)$$

2) Determinare il sottoinsieme minimo delle ipotesi a), b) e c) su $\varphi \geq 0$ tale che sia vera l'implicazione $(*)$.

Esercizio 3 (8 punti) Determinare tutti i possibili valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \alpha x^2, \quad x \geq 0,$$

sia convessa su $[0, \infty)$. Dimostrare quindi la disuguaglianza

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad x \geq 0.$$

Esercizio 4 (8 punti) In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'integrale improprio

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{e^{\alpha x} + 1}}{e^x + 5}\, dx.$$

1) Determinare tutti i valori di α tali che l'integrale converga.

2) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

3) (facoltativo) Calcolare il limite

$$\lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha).$$

Tempo a disposizione: 3 ore.