

Analisi Matematica 1 – B

Nome:

Appello scritto del 28 Giugno 2012

Esercizio 1 (11 punti) Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\left(1 + \sinh \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} - e \right).$$

Esercizio 2 (11 punti) Sia $p > 1$ un numero reale fissato. Determinare le migliori costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $t > 0$ risulti

$$\alpha \leq \frac{t^p + 1}{(t + 1)^p} \leq \beta.$$

Esercizio 3 (11 punti) Sia $I :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$I(x) := \int_x^{2x} \frac{1}{1 + y \log y} dy, \quad x > 0.$$

- i) Maggiorando opportunamente l'integrale dimostrare che $I(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ (sugg: la funzione integranda è decrescente).
- ii) Mostrare che I è derivabile su $]0, +\infty[$ e calcolare $I'(x)$.
- iii) Determinare delle costanti $C \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che $I(x) \sim_{+\infty} C(\log x)^\beta$.

Tempo a disposizione: 2.15 ore.