Analisi Matematica 1

Nome: Appello scritto del 17 Settembre 2012

Esercizio 1 (8 punti) Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione non negativa tale che:
a) $\varphi(0) = 0$; b) φ è strettamente crescente; c) φ è continua.

1) Provare che per ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vale l'implicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|^2) < \infty. \tag{$*$}$$

2) Determinare il sottoinsieme minimo delle ipotesi a), b) e c) su $\varphi \geq 0$ tale che sia vera l'implicazione $(*)$.

Esercizio 3 (8 punti) Disegnare rapidamente i grafici delle due funzioni

$$f(x) := \sin x, \quad g(x) := \lambda x(\pi - x), \; x \in [0, \pi], \; (\lambda > 0).$$

Stabilire se esistono valori di $\lambda > 0$ tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, \pi]$. In tal caso determinare il più piccolo valore possibile di λ.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri

$$I(x) := x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} \, dy.$$

i) Mostrare che $I(x)$ è ben definito per ogni $x > 0$. Calcolare i limiti di $I(x)$ per $x \longrightarrow 0+, +\infty$.

ii) Determinare opportune costanti a, b, c, K tali che

$$I(x) \sim_{0+} K e^{ax} x^b |\log x|^c.$$

Analoga questione a $+\infty$.

iii) Mostrare che la funzione $x \longmapsto I(x)$ ha un unico punto di massimo e tracciare un grafico approssimativo di I.

Tempo a disposizione: 3 ore.