

Analisi Matematica 1 – Matematica

Secondo Compitino

Lunedì 30 Gennaio 2012

VERSIONE A

Esercizio 1 (8 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

- i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.
- ii) Discutere la convergenza nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.
- iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

Esercizio 2 (8 punti) Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i\}$ e si consideri la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z - i}.$$

Usando la definizione $\varepsilon - \delta$ provare che f è continua in ogni punto di A .

Esercizio 3 (8 punti) Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |e^x - e^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- i) Provare che (\mathbb{R}, d) è uno spazio metrico.
- ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
- iii) Determinare il completamento di (\mathbb{R}, d) .

Esercizio 4 (8 punti) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

- i) L'interno $\text{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A .
- ii) La chiusura \bar{A} è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A .

Provare ogni affermazione

2 ore e 30 minuti a disposizione