Analisi Matematica 1

Nome: Appello scritto del 1 Febbraio 2013

Esercizio 1 (8 punti) Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Soluzione. Introduciamo la funzione

$$\varphi(m, n) = \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1}.$$

Dalle maggiorazioni

$$|\varphi(m, n)| \leq \frac{|mn|}{m^2 + n^2} \leq \frac{1}{2}, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

deduciamo che $\bar{A} \subset [-1/2, 1/2]$.
Sia $q \in \mathbb{Q}$ un numero razionale della forma $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(np, nq) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 + 1 + \frac{1}{n^2 q^2}} = \frac{x}{x^2 + 1},$$

e per la caratterizzazione sequenziale della chiusura, si ottiene l'inclusione

$$B = \Big\{ \frac{x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R} : q \in \mathbb{Q} \Big\} \subset \bar{A},$$

e di conseguenza $\bar{B} \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Affermiamo che $[-1/2, 1/2] \subset \bar{B}$ (in effetti, risulterà a posteriori che $[-1/2, 1/2] = \bar{B}$). La conclusione sarà che $\bar{A} = [-1/2, 1/2]$.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

è continua, $f(-1) = -1/2$ ed $f(1) = 1/2$. Dal Teorema dei valori intermedi segue che $f(\mathbb{R}) = [-1/2, 1/2]$. Per ogni $y = f(x)$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$. Siccome $\bar{Q} = \mathbb{R}$, esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in \mathbb{Q}$ e $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Dunque, essendo f continua, si ha

$$y = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \bar{B}.$$

Questo prova l'inclusione $[-1/2, 1/2] \subset \bar{B}$.

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione non negativa tale che:
a) $\varphi(0) = 0$; b) φ è strettamente crescente; c) φ è continua.

1) Provare che per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale l'implicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|^2) < \infty. \tag{$*$}$$

2) Determinare il sottoinsieme minimo delle ipotesi a), b) e c) su $\varphi \geq 0$ tale che sia vera l'implicazione $(*)$.

Soluzione. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|)$, converge, allora il suo termine generale è infinitesimo: $\lim_{n\to\infty} \varphi(|a_n|) = 0$. Siccome $\varphi \geq 0$ e φ è strettamente crescente, deve essere

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Se infatti esistessero $\delta > 0$ ed infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che $|a_n| \geq \delta$ allora si avrebbe $\varphi(|a_n|) \geq \varphi(\delta) > \varphi(0) \geq 0$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$, e questo sarebbe assurdo. Per avere la disuguaglianza $\varphi(\delta) > 0$ abbiamo usato il fatto che φ è strettamente crescente.
Definitivamente avremo $|a_n| \leq 1$ e quindi $|a_n|^2 \leq |a_n|$. Dal fatto che φ è crescente (qui non serve "strettamente crescente") segue che $\varphi(|\alpha_n|^2) \leq \varphi(|a_n|)$ per $n \geq \bar{n}$, dove $\bar{n}$ è opportunamente grande. Dunque per confronto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \varphi(|\alpha_n|^2) \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \varphi(|\alpha_n|) < \infty,$$

deduciamo che la serie a sinistra converge.

Abbiamo usato esclusivamente l'ipotesi che $\varphi \geq 0$ sia strettamente crescente.

Esercizio 3 (8 punti) Determinare tutti i possibili valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \alpha x^2, \quad x \geq 0,$$

sia convessa su $[0,\infty)$. Dimostrare quindi la disuguaglianza

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad x \geq 0.$$

Soluzione. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \alpha x^2, \quad x \geq 0.$$

Siccome f è due volte derivabile su $[0, \infty)$, f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ su $[0, \infty[$. Ora

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + 2\alpha x,$$

mentre

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} + 2\alpha \geq 0, \quad \text{se e solo se} \quad (1+x)^{-3/2} \leq 8\alpha, \ \forall x \geq 0.$$

Chiaramente $\max_{x\in[0,\infty)}(1+x)^{-3/2} = 1$ per cui dovrà essere $8\alpha \geq 1$, ovvero $\alpha \geq \frac{1}{8}$.
Per rispondere al secondo quesito osserviamo che, in base a quanto detto, per $\alpha = \frac{1}{8}$ si ha una funzione convessa, cioè $f'' \geq 0$. Ma allora f' è crescente ed essendo $f'(0) = 0$ si ottiene $f' \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, cioè f è crescente. Ma ancora, essendo $f(0) = 0$ si trova $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, che è la tesi.

Esercizio 4 (8 punti) In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'integrale improprio

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{e^{\alpha x}+1}}{e^x + 5}\, dx.$$

1) Determinare tutti i valori di α tali che l'integrale converga.

2) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

3) (facoltativo) Calcolare il limite
$$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha).$$

Soluzione. Detta f_α la funzione integranda, essa è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Studiamo il comportamento asintotico a ∞. Chiaramente

$$f_\alpha(x) \sim_\infty e^{-(1-\alpha/2)x}, \text{ integrabile a } +\infty \iff 1 - \frac{\alpha}{2} > 0, \iff \alpha < 2.$$

Per il calcolo dell'integrale nel caso $\alpha = 1$ calcoliamo anzitutto una primitiva di $f_1(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x+5}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x+1}$, cioè $e^x = y^2-1$, $x = \log(y^2-1)$, $dx = \frac{2y}{y^2-1}\, dy$ da cui

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x+5}\, dx &= \int \frac{y}{y^2+4}\frac{2y}{y^2-1}\, dy = 2\int \frac{y^2-1+1}{(y^2+4)(y^2-1)}\, dy \\ &= 2\left(\int \frac{1}{y^2+4}\, dy + \int \frac{1}{(y^2+4)(y^2-1)}\, dy\right).\end{aligned}$$

Evidentemente
$$\int \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(y/2)^2}\,dy = \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2},$$
mentre
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(y^2+4)(y^2-1)}\,dy &= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{y^2-1}-\frac{1}{y^2+4}\right)\,dy\\ &= -\frac{1}{10}\arctan\frac{y}{2}+\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)\,dy\\ &= -\frac{1}{10}\arctan\frac{y}{2}+\frac{1}{10}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\end{aligned}$$
e quindi, in conclusione
$$F(x)=\int\frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x+5}\,dx=\frac{4}{5}\arctan\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}+\frac{1}{5}\log\left|\frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}+1}\right|.$$
Ora $F(\infty)=\frac{4}{5}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{5}$ come facilmente si verifica, per cui
$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x+5}\,dx=\frac{2\pi}{5}.$$
Passiamo all'ultima questione. Verrebbe naturale affermare che, essendo per ogni $x>0$ $e^{\alpha x}\longrightarrow 0$ per $\alpha\longrightarrow-\infty$, allora
$$I(\alpha)\longrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+5}\,dx.$$
In questo caso, essendo
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{e^x+5}\,dx &\overset{y=e^x,\ x=\log y,\ dx=\frac{1}{y}dy}{=} \int\frac{1}{y+5}\frac{1}{y}\,dy\\ &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+5}\right)\,dy=\frac{1}{4}\log\left|\frac{y}{y+5}\right|=\frac{1}{4}\log\frac{e^x}{e^x+5},\end{aligned}$$
avremmo
$$\int_0^\infty\frac{1}{e^x+5}\,dx=\frac{1}{4}\log\frac{e^x}{e^x+5}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\log 5.$$
Resta da vedere se il passaggio al limite è corretto. Non disponendo in questo corso di un risultato specifico procediamo "a mano". Abbiamo
$$0\le\int_0^\infty\frac{\sqrt{e^{\alpha x}+1}}{e^x+5}\,dx-\int_0^\infty\frac{1}{e^x+5}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sqrt{e^{\alpha x}+1}-1}{e^x+5}\,dx.$$

Dobbiamo dimostrare che questo integrale tende a zero per $\alpha \longrightarrow -\infty$. Ciò può essere fatto in vari modi. Per esempio potremmo osservare che, razionalizzando,

$$\sqrt{\mathrm{e}^{\alpha x}+1}-1=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\alpha x}+1}+1}\leq\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{2},$$

da cui, se $\alpha < 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{\alpha x}+1}-1}{\mathrm{e}^x+5}\,dx &\leq \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{2(\mathrm{e}^x+5)}\,dx\\ &\leq \frac{1}{10}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha x}\,dx=\frac{1}{10}\left[\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}\right]_{x=0}^{x=\infty}=-\frac{1}{10\alpha}\longrightarrow 0,\ \alpha\longrightarrow-\infty.\end{aligned}$$