

# Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 9 Ottobre 2013



## Contents

Chapter 1. Cardinalità	5
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale	5
2. Cardinalità	8
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili	10
4. Numeri naturali e induzione	12



## Cardinalità

### 1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

**1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi.** Non diamo una definizione di “insieme”. Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato “insieme ambiente”, che indicheremo con  $X$ . Se un elemento  $x$  di  $X$  appartiene ad un insieme  $A$  scriveremo  $x \in A$ . Se  $x$  non appartiene ad  $A$  scriveremo  $x \notin A$ . Con  $A \subset B$  si intende l’inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo  $\subset$  viene talvolta indicato con  $\subseteq$ . Se  $A \subset B$  e  $B \subset A$  gli insiemi  $A$  e  $B$  contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali,  $A = B$ .

L’unione e l’intersezione di due insiemi  $A$  e  $B$  si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

L’insieme che non contiene alcun elemento, l’*insieme vuoto*, si indica con  $\emptyset$ . Chiaramente, si ha  $\emptyset \subset A$  per ogni insieme  $A$ . Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono *disgiunti* se  $A \cap B = \emptyset$ .

La differenza di insiemi  $A \setminus B$  (leggi “ $A$  meno  $B$ ”) è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Talvolta la differenza  $A \setminus B$  è indicata con  $A - B$ .

Il complementare di un insieme  $A$  in  $X$  è l’insieme  $A' = X \setminus A$ . Talvolta il complementare è indicato con  $A^c$ . Con tale notazione si ha  $A \setminus B = A \cap B'$ . Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia  $\Lambda$  una famiglia di indici e siano  $A_\lambda$  insiemi indicizzati da  $\lambda \in \Lambda$ . Allora l’unione e intersezione della famiglia  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sono:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda, \\ X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda. \end{aligned}$$

**1.2. Funzioni fra insiemi.** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$  è un'applicazione che associa ad ogni elemento  $x \in A$  un elemento  $f(x) \in B$ . L'insieme  $A$  si dice *dominio* e l'insieme  $B$  si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi  $A$  e  $B$  è l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Con  $(x, y)$  si indica la *coppia ordinata* formata da  $x$  e  $y$ , nell'ordine. Il *grafico* di una funzione  $f : A \rightarrow B$  è il seguente sottoinsieme di  $A \times B$ :

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}.$$

**OSSERVAZIONE 1.1.** La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da  $A$  a  $B$*  è una terna ordinata  $(A, B, G)$  dove  $G \subset A \times B$  è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni  $x \in A$  esiste un unico  $y \in B$  tale che  $(x, y) \in G$ . L'insieme  $G = \text{gr}(f)$  è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione  $f : A \rightarrow B$  per indicare una funzione.

**DEFINIZIONE 1.2** (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme  $C \subset A$ , l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \{f(x) \in B : x \in C\} \\ &= \{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di  $C$  rispetto ad  $f$ .

Dato un insieme  $D \subset B$ , l'insieme

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di  $D$  rispetto ad  $f$ . Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione  $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$ .

**PROPOSIZIONE 1.3.** Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano  $A_\lambda \subset A$  e  $B_\lambda \subset B$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Allora si ha:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), & f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), & f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).
 \end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che  $\exists x \exists \lambda \dots \Leftrightarrow \dots \exists \lambda \exists x$ .

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
 \end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
 &\Rightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).
 \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda : A(x, \lambda) \text{ è vera} \Rightarrow \forall \lambda \exists x : A(x, \lambda) \text{ è vera,}$$

dove  $A(x, \lambda)$  è un'affermazione che riguarda  $x$  e  $\lambda$ . Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecedente c'è una  $x$  che rende vera l'affermazione per ogni  $\lambda$ . Nella conseguente, invece, per ogni  $\lambda$  c'è una  $x$  (che quindi dipende da  $\lambda$ ) che rende vera l'affermazione.

ESEMPIO 1.5. Sia  $A = \{0, 1\}$  un insieme formato da due elementi e sia  $B = \{0\}$ . L'unica funzione  $f : A \rightarrow B$  è  $f(0) = f(1) = 0$ . Detti  $A_0 = \{0\}$  e  $A_1 = \{1\}$ , si ha  $A_0 \cap A_1 = \emptyset$  e quindi  $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$ , mentre  $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$ .

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice:

- i) *iniettiva* (1-1) se  $f(x) = f(y)$  implica  $x = y$  (equivalentemente se  $x \neq y$  implica  $f(x) \neq f(y)$ );
- ii) *suriettiva* (su) se per ogni  $y \in B$  esiste  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ ;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$f : A \xrightarrow{1-1} B$  funzione iniettiva,

$f : A \xrightarrow{\text{su}} B$  funzione suriettiva,

$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$  funzione iniettiva e suriettiva.

**DEFINIZIONE 1.7** (Funzione inversa e composta). Se  $f : A \rightarrow B$  è una funzione iniettiva, allora  $f : A \rightarrow f(A)$  è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa*  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  due funzioni tali che  $f(A) \subset C$ . Allora è ben definita la *funzione composta*  $g \circ f : A \rightarrow D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se  $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$  allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A \quad \text{funzione identità su } A,$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_B \quad \text{funzione identità su } B.$$

**DEFINIZIONE 1.8.** Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione. Una funzione  $g : B \rightarrow A$  si dice *inversa sinistra* di  $f$  se  $g \circ f = \text{Id}_A$ . Una funzione  $h : B \rightarrow A$  si dice *inversa destra* di  $f$  se  $f \circ h = \text{Id}_B$ .

**OSSERVAZIONE 1.9.** Se  $f : A \rightarrow B$  è suriettiva, allora per ogni  $y \in B$  la “fibra”  $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$  è non vuota. Con l’Assioma della Scelta, per ogni  $y \in B$  si può selezionare un elemento  $x \in f^{-1}(\{y\})$  e definire una funzione  $h : B \rightarrow A$  ponendo  $h(y) = x$ . Dunque, si ha  $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$  per ogni  $y \in B$ . La funzione  $h$  è un’inversa destra di  $f$ .

## 2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

**DEFINIZIONE 2.1.** Siano  $A$  e  $B$  insiemi. Diremo che:

- i)  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  se esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$ ;
- ii)  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  se esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $f : A \rightarrow B$ ;
- iii)  $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$  se  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  ma non esiste alcuna funzione suriettiva  $f : A \rightarrow B$ .

Se  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  diremo che gli insiemi  $A$  e  $B$  sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

**TEOREMA 2.2** (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità:  $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$ , oppure  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ , oppure  $\text{Card}(B) < \text{Card}(A)$ .



La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  equivale all'esistenza di una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$  e di una funzione iniettiva  $g : B \rightarrow A$ .

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme  $A$  è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme  $\mathcal{P}(A)$  contiene sempre l'elemento  $\emptyset$ .

**TEOREMA 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein).** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi, e siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $h : A \rightarrow B$ .

**DIM.** Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  che preserva le inclusioni:

$$(2.2) \quad E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F).$$

Affermiamo che esiste  $F \in \mathcal{P}(A)$  tale che  $F = T(F)$  (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi  $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\}$ . È certamente  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  in quanto  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che  $T(F) = F$ . Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\left(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\right) = T(F).$$

D'altra parte, applicando  $T$  all'inclusione  $F \subset T(F)$  si ottiene  $T(F) \subset T(T(F))$  e quindi  $T(F) \in \mathcal{A}$ , da cui segue l'inclusione opposta  $T(F) \subset F$ . La conclusione è che  $T(F) = F$ .

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che  $T$  preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F &\Rightarrow f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso  $A_1 \in \mathcal{P}(A)$  di  $T$  ovvero un insieme tale che  $T(A_1) = A_1$ . Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente  $A = A_1 \cup A_2$  e  $B = B_1 \cup B_2$  con unioni disgiunte. La funzione  $f : A_1 \rightarrow B_1$  è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che  $g(B_2) = A_2$ . Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque,  $g : B_2 \rightarrow A_2$  è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva  $h : A \rightarrow B$  nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

PROPOSIZIONE 2.4. Per ogni insieme  $A$  risulta  $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$ .

DIM. Certamente  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$  in quanto la funzione  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ,  $f(x) = \{x\}$  è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ . La dimostrazione si basa sul “paradosso di Russell”. Si consideri l’insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè  $f$  è suriettiva, esiste  $x_0 \in A$  tale che  $f(x_0) = A_0$ . Ci sono due casi:

Caso 1:  $x_0 \in A_0$ . Allora:  $x_0 \notin f(x_0) = A_0$ , assurdo.

Caso 2:  $x_0 \notin A_0$ . Allora:  $x_0 \in f(x_0) = A_0$ , assurdo.

□

### 3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l’insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$  per escludere lo 0.

**1. Insieme finito.** Un insieme  $A$  si dice *finito* se esistono  $n \in \mathbb{N}$  ed una funzione  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che  $\text{Card}(A) = n$ . Se  $A$  non è finito, diremo che  $A$  è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo  $\text{Card}(A) = \infty$ .

PROPOSIZIONE 3.1. Se  $A$  è un insieme finito ed  $f : A \rightarrow A$  è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1)  $f$  è iniettiva;
- 2)  $f$  è suriettiva;
- 3)  $f$  è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di  $A$ .

ESEMPIO 3.2. L’insieme dei numeri pari  $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$  è infinito ed è equipotente con  $\mathbb{N}$ . Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$  è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

DEFINIZIONE 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

**2. Insieme numerabile.** Un insieme  $A$  si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Diremo in questo caso che:

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (\text{Alef zero}).$$

Il cardinale  $\aleph_0$  è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se  $A$  è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . La costruzione di  $f$  è induttiva:

- i) Se definisce  $f(0) \in A$  a piacere;
- ii) Definiti  $f(1), \dots, f(n) \in A$  distinti, si osserva che l'insieme  $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$  non è vuoto, altrimenti  $A$  sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento  $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ . Ne risulta una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile  $A$  possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

**3.  $\mathbb{Z}$  è numerabile.** L'insieme  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

**4.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile.** Proviamo che il prodotto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile, ovvero che

$$\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $f(n) = (n, 1)$  è iniettiva. D'altra parte, la funzione  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(n, m) = 2^n 3^m$  è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**ESERCIZIO 3.1.** Controllare che la funzione  $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n+1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

**5.  $A \times A$  è numerabile se  $A$  è numerabile.** Se  $A$  è numerabile, anche il prodotto cartesiano  $A \times A$  è numerabile. Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva e suriettiva. Allora  $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ ,  $F(n, m) = (f(n), f(m))$  è iniettiva e suriettiva. La composizione  $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$  è allora iniettiva e suriettiva. Qui  $h$  è la funzione definita sopra.

**6.  $\mathbb{Q}$  è numerabile.** L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  e quindi l'inclusione è iniettiva da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Q}$ . Si consideri la funzione  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione  $g$  è iniettiva. Siccome  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  è numerabile, esiste  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva e suriettiva. Dunque  $h \circ g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  è iniettiva.

### 7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

**PROPOSIZIONE 3.4.** Siano  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ , insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  è al più numerabile.

**DIM.** Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi  $A_n$  siano a coppie disgiunti, ovvero  $A_n \cap A_m = \emptyset$  se  $n \neq m$ , e che  $A_n \neq \emptyset$ . Vogliamo provare che  $A$  è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di  $A_n$  in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ ,  $f(n) = a_{n,1}$  è iniettiva. Costruiamo una funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva. È noto che l'insieme  $P \subset \mathbb{N}$  dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo  $P$ :

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$  nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione  $g$  è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \Leftrightarrow p_n^j = p_m^k \Leftrightarrow n = m, j = k \Leftrightarrow a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

**8.  $\mathbb{R}$  non è numerabile.** Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  non è numerabile. È più che numerabile.

### 4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

**Principio d'induzione.** Sia  $A(n)$  un'affermazione che riguarda il numero naturale  $n \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che:

- i)  $A(0)$  (oppure  $A(1)$  se  $\mathbb{N}$  inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
- ii)  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (*passo induttivo*).

Allora  $A(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.1. Formula per la somma geometrica.** Per ogni numero reale  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$(4.3) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La formula vale anche se  $x \in \mathbb{C}$  è un numero complesso  $x \neq 1$ . La prova è per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

**4.2. Disuguaglianza di Bernoulli.** Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero reale tale che  $x > -1$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha:

$$(4.4) \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

La prova è per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo  $n \in \mathbb{N}$  e proviamola per  $n + 1$ :

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

**4.3. Formula del Binomio di Newton.** Il *fattoriale*  $n!$  si definisce per induzione nel seguente modo:

- i)  $0! = 1$  e  $1! = 1$ ;
- ii)  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ .

Dati  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$ , si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando  $n = 1$  la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per  $n$  e proviamola per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$  vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$