Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 30 Ottobre 2013

Contents

CHAPTER 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\},$$
$$A \cap B = \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}.$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'*insieme vuoto*, si indica con $\emptyset$. Chiaramente, si ha $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A. Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sono:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\},$$
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A'_\lambda, \quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda,$$
$$X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Con (x, y) si indica la *coppia ordinata* formata da x e y, nell'ordine. Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\} \\ &= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f. Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$.

Proposizione 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} & f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \\ & f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che $\exists x \exists \lambda \ldots \Leftrightarrow \ldots \exists \lambda \exists x$.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\ &\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera } \;\Rightarrow\; \forall \lambda \exists x \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera},$$

dove $A(x,\lambda)$ è un'affermazione che riguarda x e λ. Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecendente c'è una x che rende vera l'affermazione per ogni λ. Nella conseguente, invece, per ogni λ c'è una x (che quindi dipende da λ) che rende vera l'affermazione.

ESEMPIO 1.5. Sia $A = \{0, 1\}$ un insieme formato da due elementi e sia $B = \{0\}$. L'unica funzione $f : A \to B$ è $f(0) = f(1) = 0$. Detti $A_0 = \{0\}$ e $A_1 = \{1\}$, si ha $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ e quindi $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$, mentre $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione $f : A \to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$f : A \xrightarrow{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow{\text{su}} B \quad \text{funzione suriettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva e suriettiva.}$$

Definizione 1.7 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{funzione identità su } A,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{funzione identità su } B.$$

Definizione 1.8. Sia $f : A \to B$ una funzione. Una funzione $g : B \to A$ si dice *inversa sinistra* di f se $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Una funzione $h : B \to A$ si dice *inversa destra* di f se $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.

Osservazione 1.9. Se $f : A \to B$ è suriettiva, allora per ogni $y \in B$ la "fibra" $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ è non vuota. Con l'Assioma della Scelta, per ogni $y \in B$ si può selezionare un elemento $x \in f^{-1}(\{y\})$ e definire una funzione $h : B \to A$ ponendo $h(y) = x$. Dunque, si ha $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$. La funzione h è un'inversa destra di f.

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

Teorema 2.2 (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$.

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

Teorema 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

Dim. Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{2.2}$$

Affermiamo che esiste $F \in \mathcal{P}(A)$ tale che $F = T(F)$ (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando T all'inclusione $F \subset T(F)$ si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$. La conclusione è che $T(F) = F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F \quad &\Rightarrow \quad f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow \quad B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow \quad g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow \quad A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

Proposizione 2.4. Per ogni insieme A risulta $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$.

Dim. Certamente $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:
Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.
Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\text{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\text{Card}(A) = \infty$.

Proposizione 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di A.

Esempio 3.2. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \ldots, 2n, \ldots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

Definizione 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots a_n, \dots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m (2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.4. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, e che $A_n \neq \emptyset$. Vogliamo provare che A è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \to \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \to \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \quad \Leftrightarrow \quad p_n^j = p_m^k \quad \Leftrightarrow \quad n = m,\ j = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione.*

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{4.3}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k - 1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k - 1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \le n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi

Esercizio 5.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.3. Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Provare che

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

Esercizio 5.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
3) Stabilire se f è iniettiva.
4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 5.3. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \to D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}.$$

1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \to D$.

Esercizio 5.4. Sia $f : A \to B$ una funzione.

1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha
$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.
2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha
$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

Esercizio 5.5. Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Esercizio 5.6. Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;
2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;
3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.7. Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

Esercizio 5.8. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

Esercizio 5.9. Dimostrare per induzione che

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \geq 1$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

$$3) \quad n! < \Big(\frac{n}{2}\Big)^n, \quad n \geq 6.$$

Esercizio 5.10. Sia $\mathcal{A} = \big\{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\big\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).

Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di $\mathcal{A}$ di lunghezza maggiore di $1/n$ contenuti nell'intervallo $(-m, m)$, con $n, m \geq 1$.

Esercizio 5.11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$.

Esercizio 5.12. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione f.

Esercizio 5.13. i) Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $f^{-1}(\{y\})$ sia numerabile per ogni $y \in [0,1]$.

ii) Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ per ogni $y \in [0,1]$. Assumere come noto il fatto che $\mathrm{Card}([0,1] \times [0,1]) = \mathrm{Card}([0,1])$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale.

Definizione 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

Definizione 1.2 (Ordine parziale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Ad esempio, l'insieme $X = \mathcal{P}(A)$ con la relazione di inclusione insiemistica $\subset$ è parzialmente ordinato.

Definizione 1.3 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva);
iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità).

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.* Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

Definizione 2.1. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);

(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;
(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

Definizione 2.2 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).
i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) si dice *campo*.
ii) Se, in aggiunta ad i), vi è su X una relazione di ordine totale $\leq$ che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.
iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \leq)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi; $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi ordinati; $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.
Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esempio 2.3. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo ordinato.

1) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1.

2) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

3) Si ha $x^2 \geq 0$ per ogni x nel campo ordinato. Infatti, se $x \geq 0$ allora $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$. Se invece $x \leq 0$ allora $-x \geq 0$ e quindi

$$0 \leq (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

Proposizione 2.4. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Che $\mathbb{C}$ sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\geq$. L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. $\square$

Definizione 2.5 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo
$$\sup A = x.$$
iv) Se A non è superioremente limitato porremo
$$\sup A = \infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

Osservazione 2.6 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

Definizione 2.7 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo
$$\inf A = x.$$
iv) Se A non è inferiormente limitato porremo
$$\inf A = -\infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\min A = x.$$

Osservazione 2.8 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Rienunciamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Tale assioma puè essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:

1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.

2) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
3) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.
4) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente (ovvero, $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo).
6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che $I_{k+1} \subset I_k$ verifica
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.9 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme
$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$
è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:
$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$
che è una contraddizione. □

Definizione 2.10 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme
$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$
Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di* x
$$[x] = \max\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$
Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di* x è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:
$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.11 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y-x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \le ny \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \le y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\Big(\frac{[ny]}{n} - x\Big) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. □

3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali $\mathbb{R}$.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema.

Definizione 3.1. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \le a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

Osservazione 3.2. La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di $\mathbb{Q}$. In questo modo, ad ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \big\{a \in \mathbb{Q} : a < q\big\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della sezione

$$A = \big\{a \in \mathbb{Q} : a \le 0 \text{ oppure } a^2 < 2\big\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \le B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\le$.

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} :\ \text{esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\ b \in B,\ \text{tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A > 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} :\ \text{esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$. Se invece $A < 0$ si definisce $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

TEOREMA 3.3. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

DIM. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in C$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

È possibile una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$, che prescinde dalla relazione d'ordine. Precisamente, $\mathbb{R}$ può essere costruito come il completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

4.1. Intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\big\} && \text{intervallo aperto a destra,}\\
(a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\big\} && \text{intervallo aperto a sinistra,}\\
[a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\big\} && \text{intervallo chiuso.}
\end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned}
(-\infty,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
(-\infty,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\big\} && \text{intervallo chiuso,}\\
(a,\infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x > a\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a,\infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\big\} && \text{intervallo chiuso,}
\end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

In questo modo $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

Definizione 5.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 5.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 5.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{ y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r \big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Esercizi

6.1. Numeri reali e razionali. Parte intera e frazionaria.

Esercizio 6.1. Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato provare che per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \leq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$.
Indicare in ciascun passaggio la proprietà che si utilizza.

Esercizio 6.2. i) Verificare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. ii) Verificare che $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 6.3. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x.

6.2. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo.

Esercizio 6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 6.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{ n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 6.6. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

Esercizio 6.7. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle due disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \Big\{ \Big| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \Big|, \Big| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \Big| \Big\}.$$

Esercizio 6.8. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \left\{ x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
3) Verificare che $\sup C = \infty$.
4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

Esercizio 6.9. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \Big\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \Big\},$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$ e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

6.3. Spazi metrici.

Esercizio 6.10. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

Esercizio 6.11. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

Esercizio 6.12. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su $\mathbb{R}^n$ oppure no. Provare ogni affermazione.

Esercizio 6.13. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico. Ad esempio per $\alpha = 1/2$.

6.4. Disuguaglianze.

Esercizio 6.14. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2}\Big(tx^2 + \frac{1}{t}y^2\Big).$$

Esercizio 6.15. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ punti tali che $\langle x, y \rangle = |x||y| \neq 0$. Provare che esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che $x = \lambda y$.

Esercizio 6.16. Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \ldots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$

Esercizio 6.17. Siano $x_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, \dots, n$, numeri reali. Provare che

$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i}{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^n} \le \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)}{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\Big)^n}.$$

CHAPTER 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale (risp. complessa)* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (risp. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ (risp. $a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione.*

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. $\square$

Osservazione 1.4. Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i\operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Queste affermazioni seguono dalle disuguaglianze

$$\max\{|\operatorname{Re}(a_n - L)|, |\operatorname{Im}(a_n - L)|\} \le |a_n - L| \le |\operatorname{Re}(a_n - L)| + |\operatorname{Im}(a_n - L)|.$$

Definizione 1.5. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \ge M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \le -M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esercizio 1.1. Verificare usando la definizione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \ge M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}. \tag{1.5}$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \le x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \le n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \ge \frac{n^2(n-1)}{n^2+1} \ge \frac{n-1}{2},$$

per $n \ge 1$. Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \ge M \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 2M+1.$$

Con una scelta di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \ge 2M+1$, la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 1.6. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

$\square$

TEOREMA 1.7 (Operazioni coi limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$
2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$
3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ (risp. $L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.6, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \leq |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\Big| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

Teorema 1.8 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

Definizione 1.9. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.10. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.2. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali (o complessi) nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$P(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$Q(x) = b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ e senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Questa disuguaglianza può essere verificata per induzione (esercizio).Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Dall'identità $|z^n| = |z|^n$ si deduce che per $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Se invece $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$ il limite non esiste.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Definizione 3.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

Proposizione 3.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Dim. L'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 3.2 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

Esercizio 3.1 (Successioni ricorsive). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.