

Analisi Matematica 1 – Matematica

Completezza e compattezza

16 Gennaio - Foglio 11

A. Esercizi di primo livello

Esercizio 1 Provare che il seguente insieme è compatto nella topologia standard di \mathbb{C} :

$$K = \left\{ \frac{1+ni}{n+i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{i\}.$$

Provare l'affermazione sia con la definizione di compattezza per ricoprimenti sia con la definizione di compattezza sequenziale.

Esercizio 2 Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subset X$ un sottoinsi. chiuso. Provare che:

i) Se X è compatto allora anche K è compatto.

ii) Se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X .

Esercizio 3 Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione biiettiva e continua. Provare che se X è compatto allora la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua.

B. Esercizi di secondo livello

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano (anche infiniti) e siano uguali i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Provare che f ha minimo oppure massimo assoluto.

Esercizio 5 Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che:

i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$.

Provare che esiste $x \in X$ tale che $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.

Il diametro di un insieme $A \subset X$ è $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$.

C. Esercizi di terzo livello

Esercizio 6 Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |e^x - e^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- i) Provare che (\mathbb{R}, d) è uno spazio metrico.
- ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
- iii) Determinare il completamento di (\mathbb{R}, d) .

Esercizio 7 Dopo aver determinato l'immagine della funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

considerare lo spazio metrico (\mathbb{R}, d) con la distanza

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- i) Provare che d è una metrica su \mathbb{R} .
- ii) Provare che (\mathbb{R}, d) non è completo.
- iii) Calcolare il completamento di questo spazio metrico.